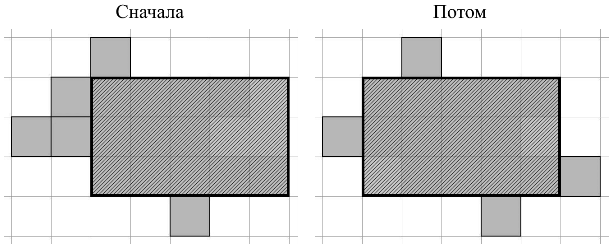
# Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2019

## Решения задач | 3 класс

1. *Палиндром* – это число (или фраза), которое читается одинаково в обе стороны. Год, когда познакомились Шерлок Холмс и доктор Ватсон – это четырехзначный палиндром. Сумма его цифр равна числу, записанному двумя последними цифрами в обратном порядке. В каком году познакомились Холмс и Ватсон?

**Ответ:** в 1881 году. **Решение 1:** запишем число в виде $XYYX$. Из условия следует, что $10X + Y = 2X + 2Y$. Значит, $Y = 8X$. Так как $Y$ – однозначное число, то подходит только $X$, равное 1. Тогда $Y$ равен 8. Ответ, таким образом – 1881. **Решение 2**: осуществим перебор – 1001, 1111, 1221, …, 1991, 2002. Подходит только 1881.

2. Фигуру странной формы закрыли прямоугольником площадью меньше 20 клеточек так, что остались видны только 5 целых клеточек. Потом прямоугольник подвинули, и стало видно только 4 целые клеточки. Нарисуйте, как он закрывал фигуру сначала и потом.




**Один из возможных вариантов ответа изображён на рисунке.**

3. У короля и королевы есть сын и дочь – принц и принцесса. Король старше королевы на 4 года. Принц также старше принцессы на 4 года и вдвое младше короля, а всем четверым вместе 130 лет. Сколько лет каждому из них?

**Ответ:** королю 46 лет, королеве – 42, принцу – 23 и принцессе – 19. **Решение:** добавим мысленно королеве и принцессе по 4 года. Теперь король и королева одного возраста, принц и принцесса тоже. И король, и королева теперь вдвое старше и принца, и принцессы. Всем четверым вместе стало 138 лет. Значит, королю и принцу вместе 69 лет. Так как король вдвое старше принца, то королю 46 лет, а принцу 23 года. Вспомним, что на самом деле король старше королевы на 4 года, а принц старше принцессы на 4 года. Отсюда королеве 42 года и принцессе 19 лет.

4. Расставьте в клеточки квадрата $6 \times 6$ крестики и нолики по одному в каждую клеточку так, чтобы по любой вертикали, по любой горизонтали и по любой диагонали нигде не было подряд ни трех ноликов, ни трех крестиков.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| × | × | ○ | ○ | × | × |
| ○ | ○ | × | × | ○ | ○ |
| × | × | ○ | ○ | × | × |
| ○ | ○ | × | × | ○ | ○ |
| × | × | ○ | ○ | × | × |
| ○ | ○ | × | × | ○ | ○ |

**Один из возможных вариантов ответа изображён на рисунке.**

5. Васина программа за один ход заменяет текущее число на новое по таким правилам: для текущего числа вычисляется остаток при делении на 3, а затем текущее число заменяется на новое в зависимости от остатка: 1) если остаток 0, то из числа вычитается 2; 2) если остаток 2, то к числу прибавляется 1; 3) если остаток 1, то из числа вычитается 1. Вася запустил программу с числа 200. Какое число получится после 123 ходов?

**Ответ:** 18. **Решение:** начнем выполнять действия с 200:

1 ход: при делении 200 на 3 остаток 2, $200 + 1 = 201$. 2 ход: при делении 201 на 3 остаток 0, $201 - 2 = 199$.
3 ход: при делении 199 на 3 остаток 1, $199 - 1 = 198$. 4 ход: при делении 198 на 3 остаток 0, $198 - 2 = 196$.
5 ход: при делении 196 на 3 остаток 1, $196 - 1 = 195$.

Теперь видно, что будет происходить дальше – при делении на 3 будут чередоваться остатки 0 и 1. Значит, мы будем поочередно вычитать 1 и 2. За каждые два хода, таким образом, будем вычитать 3. Осталось совершить 118 ходов, это 59 пар ходов. Так как за каждую пару мы уменьшаем число на 3, то за 59 пар мы уменьшим на 177. Значит, после 123-го хода получим 18.

6. В парке развлечений три самых страшных аттракциона: Ракета, Катапульта и Бустер. Прокатиться на Бустере можно, только если ты уже прокатился и на Ракете, и на Катапульте. Каждый из 20 школьников 3 «А» класса прокатился хотя бы на одном аттракционе. При этом 10 школьников прокатились на Бустере, 15 школьников на Ракете и 18 школьников – на Катапульте. Сколько школьников прокатились ровно на двух аттракционах?

**Ответ:** 3 школьника. **Решение:** если школьник прокатился ровно на двух аттракционах, то это Катапульта и Ракета. Так как 10 школьников прокатились на Бустере, то они прокатились и на Катапульте, и на Ракете. Тогда школьников, катавшихся на Ракете, но не катавшихся на Бустере, будет $15-10=5$. Школьников, прокатившихся на Катапульте, но не катавшихся на Бустере, будет $18-10=8$. С другой стороны, людей, не катавшихся на Бустере, 10.
Задача, таким образом, превратилась в такую: «Десять школьников катались на двух аттракционах – Ракете и Катапульте. Каждый прокатился хотя бы раз. На Ракете прокатились 5 человек, на Катапульте – 8. Сколько человек прокатились на обоих аттракционах?»
Станем считать ребят. С одной стороны, их 10. С другой стороны – это ребята, катавшиеся на Ракете и ребята, катавшиеся на Катапульте, это $8+5=13$. Получилось 13, а не 10, из-за того, что ребят, катавшихся на обоих аттракционах, мы посчитали дважды – один раз в катавшихся на Ракете и один раз в катавшихся на Катапульте. Так как $13-10=3$, то дважды мы посчитали трёх человек. Значит, на двух аттракционах прокатились три человека.

7. Решите ребус $М \cdot А \cdot Т = К + Р + У + Ж + О + К$. За каждой буквой спряталось одно из чисел от 1 до 8. За одинаковыми буквами прячутся одинаковые числа, а за разными – разные. Найдите хотя бы одно решение этого ребуса.

**Ответ:** $3 \cdot 5 \cdot 2 = 4+1+6+7+8+4$. **Пояснение:** заметим первым делом, что наименьшее значение правой части может быть $1+2+3+4+5+1=16$, а наибольшее – $8+7+6+5+\ 4+8=38$. В наборе от 1 до 8 четных чисел 4, нечетных – столько же. Пусть К – четное. Тогда из соображений одинаковой четности правой и левой частей в наборе М, А и Т либо 2 нечетных числа, либо их нет вовсе. Если их вовсе нет, то наименьшее значение левой части $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$, что больше 38. Значит, есть надежда на две нечетные цифры среди М, А, Т. В пределах от 16 до 38 походят только такие наборы (с точностью до перестановки сомножителей): $1 \cdot 3 \cdot 6$, $1 \cdot 3 \cdot 8$, $1 \cdot 5 \cdot 4$, $1 \cdot 5 \cdot 6$, $3 \cdot 5 \cdot 2$. Подходит, как не трудно убедиться, только $3 \cdot 5 \cdot 2$. Случай, когда К нечетное, рассматривается аналогично, там нет подходящих вариантов.

8. В шахматном турнире участвовало 10 шахматистов. Каждый сыграл с каждым по одной партии, и у всех получилось различное число очков. Про шахматистов известно, что занявшие 1-е и 2-е место не проиграли ни одной встречи и вместе набрали на 20 очков больше, чем занявший 3-е место. Занявший 4-е место набрал столько же очков, сколько набрали вместе четверо с 7-го по 10-е место. Перечислите, сколько очков набрали занявшие с 1-го по 6-е место. (За победу дается 2 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков.)

**Ответ:** 1: 17 очков, 2: 16 очков, 3: 13 очков, 4: 12 очков, 5: 11 очков, 6: 9 очков. **Решение:** если у первого места 18 очков, то он выиграл у всех, включая второго. Так как занявший второе место никому не проиграл, то у первого не может быть 18, и максимальное число очков у него – 17. У второго, соответственно, не более 16-ти.
Рассмотрим пока случай, когда у первого – 17, а у второго – 16. Тогда у занявшего третье место 13 очков. Так как общая сумма очков в каждой партии – это 2, а всего партий было сыграно 45, то общее число очков у участников – это 90. Значит, люди, занявшие места с 4-го по 10-е, набрали 44 очка. Занявший 4-е место получил максимум 12 очков. Так как места с 7 по 10 вместе тоже (по условию) набрали 12 очков, то на 5 и 6 места приходится вместе 20 очков. Единственный вариант – это 11 и 9 очков.
Итак, мы получили распределение очков для случая, когда у первого 17, у второго 16, у четвертого – 12. Проверим, что этот вариант единственный. Пусть у первого и второго 17 и 16, а у четвертого – 11 или меньше. Тогда у тех, кто занял 5 и 6 места, не менее 24 очков и, значит, 5-й получил более 11 очков и обогнал 4-го, что невозможно.
Посмотрим, наконец, могут ли первый и второй получить вместе менее, чем 33 очка. Тогда у 3-го не более 12 очков, у 4-го не более 11. В этом случае у 5-го и 6-го не менее 24 очков и, значит, у 5-го больше, чем у 4-го, что невозможно.