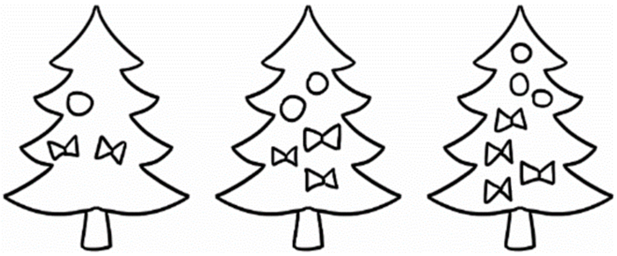
Санкт-Петербургская
математическая олимпиада 2023

Решения задач

1 класс

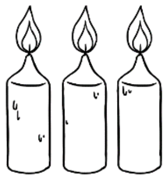
Задача 1. У Маши есть только шарики и бантики для украшения ёлок. На каждой ёлочке уже есть шарик и бантик. Добавьте на каждую ёлочку еще игрушки так, чтобы выполнялись условия:

- игрушек на каждой ёлочке не больше 7;
- на всех ёлочках разное количество игрушек;
- для каждой ёлочки верно следующее: если добавить на неё шарик, бантиков и шариков на ней станет поровну.

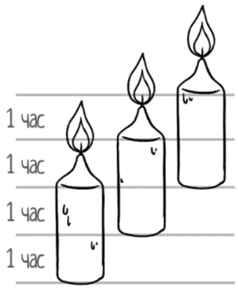


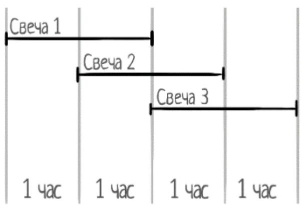
Ответ: 1 шарик и 2 бантика на одной; 2 шарика и 3 бантика на другой; 3 шарика и 4 бантика на третьей.

Задача 2. В комнате на столе стояли три одинаковых свечи. Каждая сгорает за два часа. Гном сначала зажёг первую свечу. Когда она прогорела наполовину, он зажёг вторую. Когда вторая свеча прогорела наполовину, он зажёг третью. Третья свеча горела до конца. Сколько всего времени комната была освещена свечами?

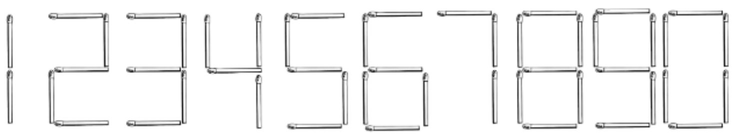


Ответ: 4 часа. **Решение.** Сначала первая свеча 1 час горела одна, затем ещё час горела вместе со второй свечой. К концу второго часа первая свеча догорела полностью, а вторая до половины. И тогда зажгли третью, которая горела ещё 2 часа. Итого 4 часа.



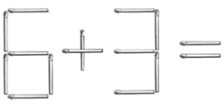


Задача 3. Почтальон Печкин умеет писать цифры специальным почтовым шрифтом, как на рисунке.



Вчера он выложил таким шрифтом пример из спичек (слева). Галчонок стащил одну спичку. Какой пример мог остаться? Запишите все варианты и посчитайте в каждом из них результат.

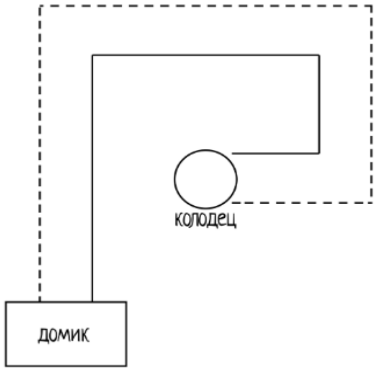
Ответы записаны в таблицу:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
			
Результат: 9	**Результат:** 12	**Результат:** 5	**Результат:** 3

Задача 4. Ёжик нарезал все свои яблоки на части и стал угощать друзей. Трём маленьким бельчатам досталось по четвертинке яблока, двум зайчатам по половинке. Большой медвежонок съел целое яблоко. Последнюю четвертинку яблока Ёжик съел сам. На сколько у Ёжика больше друзей, чем яблок?

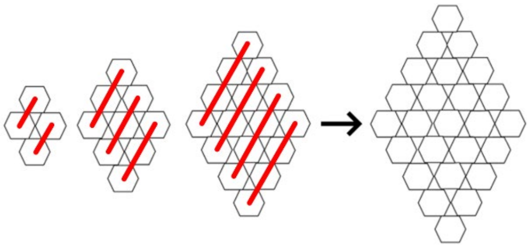
Ответ: на 3. **Решение.** У Ёжика 6 друзей: 3 бельчонка, 2 зайчонка и медвежонок. У Ёжика 3 яблока: четыре четвертинки, две половинки и одно целое. Значит, яблок больше на $6 - 3 = 3$.

Задача 5. От домика к колодцу сделали дорожку шириной 1 метр, как показано на рисунке. Длина внешнего края, обозначенного пунктиром, составляет 20 метров. Найдите длину внутреннего края, обозначенного сплошной линией.



Ответ: 14 метров. **Решение.** Каждый поворот увеличивает длину внешнего края на 2 метра. На схеме три поворота. Значит внутренняя сторона меньше на 6 метров и равна 14 м.

Задача 6. Петя составлял из шестиугольных деталек фигуры, увеличивая их размер. Сколько деталек ему нужно для следующей фигуры?



Ответ: 25 деталек. **Решение.** Можно заметить, что первая фигура состоит из двух полосок по две детальки, вторая фигура – из трёх по три, третья – из четырёх по четыре. Значит, следующая из пяти по пять.

Задача 7. В некоторых из этих коробок лежат конфеты, а остальные коробки – пустые. На пустых коробках надписи ложные, а на коробках с конфетами – правдивые. Обведите те коробки, в которых лежат конфеты.

Ответ: вторая и четвёртая. **Решение.** Если первая коробка с конфетами, то на ней написана правда и все эти коробки пустые, в том числе первая коробка. Такого не может быть. Значит, первая коробка пустая. Таким образом, одна пустая коробка точно есть. Тогда на четвёртой коробке написана правда. И в ней есть конфеты. Значит, одна коробка с конфетами точно есть. Тогда на второй коробке написана правда. И вторая коробка тоже с конфетами. Таким образом, вторая и четвёртая коробки – с конфетами. Значит, на третьей коробке написана ложь. И конфеты лежат только в коробках 2 и 4, а коробки 1 и 3 пустые.

Задача 8. К новому году Аня составила такой ребус: К + Р + О + Л + И + К = К + О + Т (одинаковые буквы – это одинаковые цифры, а разные буквы – это разные цифры). Какая самая маленькая цифра может соответствовать букве Т? Приведите пример для самой маленькой цифры Т.

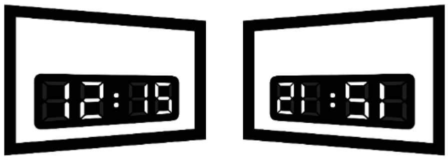
Ответ: Т = 6. **Пример:** $0 + \mathbf{1} + 4 + 2 + 3 + 0 = 0 + 4 + 6$. **Решение.** Так как Т равняется сумме четырёх разных чисел, то наименьшее значение, которое оно может принять, это $0 + 1 + 2 + 3 = 6$.

Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2023

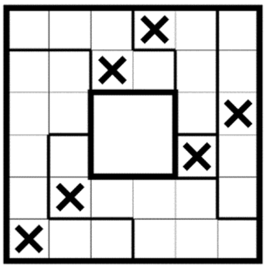
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Решения задач

2 класс



Задача 1. Игорь видит в зеркале отражение электронных часов – 21:51. Сколько времени на самом деле?
Ответ: 12:15.



Задача 2. Расставьте 6 крестиков так, чтобы в каждом столбце, в каждой строке и в каждой отмеченной фигуре был ровно один крестик.
Ответ изображён на рисунке.

Задача 3. Три поросёнка нашли в лесу неизвестного зверя. Ниф-Ниф сказал: «Это кот или крот». Нуф-Нуф сказал: «Это крот или енот». Наф-Наф сказал: «Это не крот, и не енот, и не кот!» Только один из них ошибается. Что за зверя они нашли?
Ответ: крот. **Решение.** Если это кот, то ошиблись двое – Нуф-Нуф и Наф-Наф. Если это енот, то тоже ошиблись двое – Ниф-Ниф и Наф-Наф. Если это крот, то ошибся только один – Наф-Наф.

Задача 4. В коробочке лежат различные кости домино – 6 штук. Как они расположены?
Примечание. Каждая кость домино состоит из двух квадратиков, на каждом из которых написано число от 0 до 6.
Ответ изображён на рисунке.

5	5	2	2
0	0	3	5
5	3	5	0

Задача 5. На речке было 16 мальчиков и каждый был либо мокрый, либо загорелый, либо и то, и другое. Мокрых мальчиков было на 2 больше, чем загорелых, и 6 мальчиков были мокрыми и загорелыми одновременно. Сколько на речке загорелых сухих мальчиков?
Ответ: 4. **Решение.** Уберём 6 мокрых загорелых, останется 10 – они только мокрые или только загорелые. По условию разность между ними 2, значит, только мокрых – 6, а только загорелых (и они сухие) – 4.

Задача 6. Сколькими способами можно разделились 6 детей на 3 пары, чтобы сыграть в шахматы, если Маша не хочет играть с Колей?
Примечание. Порядок детей в паре не важен (пара Паша и Люда равна паре Люда и Паша). Порядок пар также не важен.
Ответ: 12. **Решение.** Для Маши есть 4 способа выбрать себе пару. Для 4 оставшихся есть 3 способа распределиться на пары: Коля может выбрать себе любого из 3 оставшихся и тогда остальные двое образуют пару единственным образом. Для каждого выбора Маши есть 3 варианта выбора у Коли. Получаем, что всего $4 \cdot 3 = 12$ вариантов.

Задача 7. Из 10 карточек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 составили три числа, каждое больше 0, и сложили их. В записи ответа получилось пять цифр «9». Могло ли такое быть?
Примечание. если «нет», то объясните почему, если «да», то приведите пример, как это сделать.
Ответ: да. **Пример:** $95670 + 4321 + 8 = 99999$.

Задача 8. Яхта «Беда» задержалась в порту и отстала в гонке. До точки, где сейчас находится яхта «Чёрная Каракатица», «Беда» доплывет за 3 часа. «Чёрной Каракатице» сейчас осталось до финиша 6 часов. «Беда» в 3 раза быстрее «Чёрной Каракатицы». Кто придёт к финишу раньше и на сколько часов?
Ответ: яхта «Беда» опередит «Чёрную Каракатицу» на 1 час. **Решение.** Через 3 часа «Беда» дойдет до точки, где сейчас находится «Чёрная Каракатица». От этой точки ей до финиша останется плыть 2 часа – это втрое меньше времени, чем плывёт «Чёрная Каракатица», поскольку «Беда» втрое быстрее. Значит, «Беда» финиширует через $3 + 2 = 5$ часов, а «Чёрная Каракатица» – через 6 часов, это на 1 час позже.

Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2023

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Решения задач

3 класс

Задача 1. На столе лежат 7 монет. Все монеты выглядят одинаково, но одна из них фальшивая. Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивая – легче настоящей. Костя перенумеровал монеты – написал на них номера от 1 до 7. Оказалось, что кучка из монет 1, 2 и 3 тяжелее кучки из монет 4, 5 и 6, а кучка из монет 2, 4 и 7 легче кучки из монет 1, 3 и 6. Какой номер у фальшивой монеты?

Ответ: 4. **Решение.** Из того, что кучка из монет 1, 2 и 3 тяжелее кучки из монет 4, 5 и 6, следует, что фальшивая среди монет с номерами 4, 5 и 6. Из того, что кучка из монет 2, 4 и 7 легче кучки из монет 1, 3 и 6, следует, что фальшивая среди монет с номерами 2, 4 и 7. Значит, номер фальшивой монеты – 4.

Задача 2. Максим напилил несколько одинаковых столбиков и решил построить из них забор. Если бы он вкопал все столбики по прямой линии на некотором одинаковом расстоянии между соседними, то расстояние от первого до последнего столбика оказалось бы равным 48 метров. Если бы он вкопал все эти столбики по кругу на таком же расстоянии между соседними, то путь вдоль всего такого забора составил бы 51 метр. Сколько всего столбиков у Максима?

Примечание. Путь вдоль забора по кругу – идём по прямой от первого столбика ко второму, потом к третьему и, наконец, от последнего по счёту к первому.

Ответ: 17. **Решение.** Во втором случае Максим пройдёт больше на одно расстояние между столбиками, чем в первом случае. Значит, расстояние между столбиками – 3 метра. Так как при постановке по кругу интервалов между столбиками столько же, сколько и столбиков, то столбиков $51 \div 3 = 17$ штук.

Задача 3. От Андрея до Кости 17 километров по прямой дороге. Андрей сел в машину и поехал к Косте. Однако по дороге он сначала вспомнил, что забыл дома права, и вернулся за ними, потом вспомнил, что забыл дома телефон, и вернулся за ним, потом ещё раз пришлось возвращаться за подарком. В результате Андрей к тому моменту, как добрался до Кости, провёл в машине 47 минут. Все эти 47 минут и в одном направлении, и в другом Андрей ехал со скоростью $60\,\text{км/ч}$. Сколько километров в общей сложности проехал Андрей по направлению к Косте?

Ответ: 32. **Решение.** Если бы Андрей всё время ехал в направлении к Косте, то за 47 минут он удалился бы от своего дома на 47 километров. Замена одного километра по направлению к Косте на один километр в противоположном направлении убирает из общего удаления от дома 2 км. Значит, таких замен надо сделать $(47 - 17) \div 2 = 15$. Значит, в направлении к Косте Андрей в общей сложности проехал $47 - 15 = 32$ км.

Задача 4. Толя, Лена и Марина соревновались в решении задач. За время, за которое Толя решает 3 задачи, Марина решает 4 задачи. За время, за которое Марина решает 3 задачи, Лена решает 5 задач. Всего вместе они решили 82 задачи, причём начали и закончили решать они одновременно. Сколько задач решила Лена?

Ответ: 40. **Решение.** Посмотрим, что происходит за время, в течение которого Марина решает 12 задач. Толя решит 9. Лена решит 20. Значит, вместе они за это время решат 41 задачу. Значит, за то время, за которое они вместе решат 82 задачи, Лена решит 40.

Задача 5. Костя, Оля и Кристина пошли в лес за брусникой и вышли к полянке, на которой росло много грибов – белых и подберёзовиков. Подберёзовиков было в 2 раза больше, чем белых. Костя посчитал грибы и сказал, что их 33. Оля сказала, что их 36, а Кристина – что их 40. Как потом выяснилось, один из них подсчитал количество грибов верно. Ребята собрались было пересчитать грибы заново, но в этот момент на поляну пришли 4 ёжика и стали эти грибы собирать. Всем ёжикам досталось одинаковое количество грибов. Сколько грибов росло на полянке?
Ответ: 36. **Решение.** Из того, что подберёзовиков было в 2 раза больше, чем белых, следует, что количество грибов делится на 3. Из того, что четырём ёжикам досталось поровну, следует, что количество грибов делится на 4. Значит, права Оля и, значит, грибов было 36.

Задача 6. Можно ли натуральные числа от 1 до 31 (каждое по одному разу) разделить на две группы из 22-х и 9-и чисел так, чтобы сумма всех чисел в одной группе равнялась сумме всех чисел в другой?
Ответ: нельзя. **Решение.** Так как сумма всех чисел равна 496, то, если такое разделение возможно, то сумма чисел в каждой группе должна быть равна 248. Однако максимально возможная сумма в группе из девяти чисел равна $23 + 24 + 25 + \cdots + 31 = 243$. Значит, сумму чисел в группе из девяти нельзя сделать равной 248. Значит, такое разделение, как в условии задачи, невозможно.

Задача 7. Маша взяла в кулак вертикально 3 ниточки – красную, зелёную и синюю. Три конца ниточек – красный, зелёный и синий – выглядывают сверху, остальные снизу. После этого Варя связала две ниточки вверху, две внизу. Потом Маша взяла свободный кончик вверху и разжала кулак. Сколько у Вари было способов связать ниточки так, чтобы то, что в итоге получилось у Маши, не распалось на части?
Ответ: 6. **Решение.** Обозначим каждую ниточку первой буквой соответствующего цвета (К – красная, З – зелёная, С – синяя). Теперь выпишем комбинации связанных ниточек, при которых то, что получилось, не распадётся на части, сперва написав связанную вверху пару, затем – внизу: (КЗ, ЗС), (КЗ, КС), (КС, СЗ) , (КС, КЗ), (ЗС, СК) и (ЗС,ЗК). Всего 6 комбинаций.
Другое решение. Завязать ниточки вверху есть 3 варианта, внизу – 3, итого $3 \cdot 3 = 9$ вариантов вообще связать ниточки. То, что получилось, распадётся, если получится кольцо и отдельная ниточка. Вариантов сделать так, чтоб получилось кольцо, ровно 3 – внизу надо завязать то же, что и наверху. Значит, количество вариантов завязать так, чтоб не распалось, равно $9 - 3 = 6$.

Задача 8. Надя, Аня и Толя поехали отдыхать на море. В первый день Надя собрала несколько ракушек, Толя бросил в море несколько камешков, а Аня съела арбуз. Далее и до последнего дня Надя собирала ракушек на одну больше, чем в предыдущий день, Толя бросал на один камешек меньше, чем в предыдущий день, а Аня съедала арбуз. Оказалось, что за все время отдыха Надя собрала 130 ракушек, Толя бросил 117 камешков, а Аня съела не более 16 арбузов. Сколько дней ребята были на море?
Ответ: 13. **Решение.** Сумма количества собранных ракушек и выброшенных камешков за каждый день одинакова. Общее количество за все дни – 247. Значит, 247 делится нацело на количество дней. Тогда количество дней на море – это 13 или 19, так как $247 = 13 \cdot 19$. Так как Аня съела не более 16 арбузов, то дней – 13.

Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2023

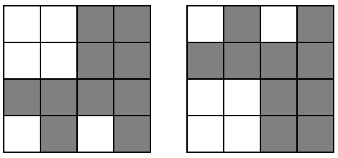
Решения задач

4 класс

Задача 1. Четырёх организаторов Олимпиады спросили: «Как вы думаете, сколько на Олимпиаде участников?» Первый ответил: «Сто или двести». Второй предположил: «Двести или триста». Третий: «Триста или сто». А четвёртый заявил: «Точно не двести!» Оказалось, что ровно двое из них правы. Так сколько же участников на Олимпиаде?

Ответ: 200. **Решение.** Если участников 200, то правы первый и второй, этот вариант подходит. Если участников 100, то правы первый, третий и четвёртый – слишком много. То же самое, если участников 300. Если участников вообще какое-то другое количество, то прав только четвёртый – опять не подходит.

Задача 2. Закрасьте в первом столбце таблицы 4×4 одну клетку, во втором – две соседние клетки, в третьем – три соседние клетки, в четвёртом – четыре клетки так, чтобы в каждой строке таблицы было закрашено чётное количество клеток.



Два возможных ответа изображены на рисунке.

Примечание. Можно понять, что других вариантов, кроме этих двух, нет. Столбик из четырёх клеток закрашивается единственным способом, три клетки в третьем столбце можно закрасить двумя способами. Пусть нижняя клетка третьего столбца пустая. Тогда нижняя клетка второго столбца должна быть закрашена! Ведь если она пустая и закрашены две другие клетки второго столбца, то в этих двух строках получается по три закрашенных клетки, и одной закрашенной клеткой в первом столбце не удастся сделать обе этих строки чётными. Итак, нижняя клетка второго столбца закрашена, а значит, и клетка сверху от неё. Теперь у нас есть одна строка с тремя закрашенными клетками – вторая снизу. И мы закрашиваем вторую снизу клетку в первом столбце.

Задача 3. У жителей потерянного в океане острова в алфавите всего три буквы: У, Х и А. Словом считается любая последовательность из 9 букв, для которой выполняются следующие правила:

- две одинаковые буквы не могут идти подряд,
- в каждом слове встречаются все три буквы алфавита,
- буквы У и А не могут стоять в слове рядом ни в каком порядке.

Какое наибольшее количество букв А может быть в слове?

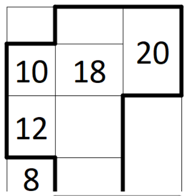
Ответ: 4. **Решение.** Четыре буквы А можно обнаружить в слове «УХАХАХАХА». Большее количество букв А обеспечить не удастся. Если букв А было бы пять, то, так как они не могут идти рядом, слово имело бы вид «$А * А * А * А * А$», где вместо знаков «$*$» стоят другие буквы, но здесь некуда поставить букву У, которая обязана встретиться в слове. Больше пяти букв А сделать не удастся, ведь иначе какие-то две буквы А стояли бы в слове подряд. В самом деле, если букв А как минимум 6, то промежутков между ними как минимум 5, которые нужно заполнять другими буквами. В итоге получилось как минимум $6 + 5 = 11$ букв, перебор!

Задача 4. Учитель написал на доске три числа и попросил четырёх учеников вычислить их сумму. У всех четверых получился правильный ответ: 15. Тогда учитель попросил вычислить произведение этих трёх чисел. Ученики снова справились, получив ответ 96. Но вот когда учитель попросил перемножить первое число со вторым, второе с третьим, а третье с первым, после чего сложить получившиеся произведения, у всех четверых получились разные ответы: 61, 63, 68 и 71. Так какой же ответ правильный, если он был получен одним из учеников?

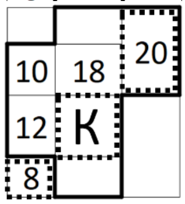
Ответ: 68. **Решение.** Произведение всех трёх чисел чётно (96), значит, хотя бы одно из чисел чётно. Но так как их сумма нечётна (15), то чётны из них ровно два. Но тогда все попарные произведения тоже чётны, так же, как и их сумма. Следовательно, правильный ответ – 68, единственный чётный ответ.

Примечание. Можно найти три числа, которые учитель написал на доске: 8, 4, 3.

Задача 5. На рисунке представлена карта города, по которому с постоянной скоростью гуляет Аркадий. Числа на карте обозначают, за сколько минут Аркадий может обойти вокруг соответствующего квартала. Сколько времени уйдет у Аркадия на прогулку по выделенному жирным маршруту?



Ответ: 48 минут. **Решение.** Для начала заметим, что квартал, отмеченный на схеме буквой К, отличается по времени обхода от квартала над ним так же, как квартал 12 от квартала 10. То есть, Аркадий может обойти квартал К за 20 минут. Таким образом, отмеченный на карте точками маршрут Аркадий может пройти за $8 + 20 + 20 = 48$ минут. Осталось только заметить, что выделенный жирным маршрут равен маршруту, выделенному точками, так как они оба составлены из равных отрезков, разнесённых по разным частям прямоугольника.



Задача 6. По телевизору уже который месяц показывают мультсериал «Бесконечные приключения». Каждый месяц на экраны выходит одинаковое количество серий. Известно, что серию номер 232 показывали в сентябре, а серии с номерами 321 и 364 – в декабре того же года. Сколько серий «Бесконечных приключений» показывают в месяц?

Ответ: 44. **Решение.** Так как серии 321 и 364 принадлежат одному месяцу, то количество серий в месяц не меньше $364 - 321 + 1 = 44$. Так как между сериями 232 и 321 есть целых два месяца, то удвоенное количество серий в месяц не больше $321 - 232 - 1 = 88$. Значит, просто количество серий в месяц не больше 44. Сопоставляя полученные два факта, получаем ответ.

Задача 7. Аркадий, Борис и Вера несколько раз сыграли в «Уно». Призом за победу были конфеты. За победу в первой игре – одна конфета, во второй – две, и так далее, каждый раз разыгрывалось на одну конфету больше. Каждый выиграл хотя бы один раз. В итоге у Аркадия оказалось 6 конфет, у Бориса – 10 конфет, а Вера выиграла меньшее количество раз, чем любой из мальчиков. Сколько конфет набрала Вера, и сколько раз выиграл Борис?

Ответ: у Веры 5 конфет; Борис выиграл 2 или 3 раза. **Решение.** Сначала заметим, что Вера брала конфеты хотя бы один раз. Значит, Аркадий (впрочем, как и Борис) брал конфеты хотя бы два раза. При этом больше трёх раз Аркадий брать конфеты тоже не мог: даже если бы он брал по минимуму, $1 + 2 + 3$ уже равно 6. Аккуратно рассмотрим два случая.

Пусть Аркадий брал конфеты три раза. Тогда он брал 1, 2 и 3 конфеты. Как Борису набрать десять конфет? Есть только один вариант: $4 + 6$. Тогда у Веры был всего один подход. И это как раз 5 конфет. Всё сошлось.

Пусть теперь Аркадий делал два подхода к конфетам. Если он брал конфеты $1 + 5$, то нужно из ряда чисел 2, 3, 4, 6, 7, 8, … взять некоторый начальный фрагмент и разбить его на две части. При этом одна часть должна давать в сумме 10, а другая часть состоять из одного числа – это конфеты Веры. $2 + 3 + 4 + 6$ представляется как $10 + 5$, но слагаемого 5 в этой сумме нет. Если брать дальнейшие суммы, то количество конфет Веры (сумма минус 10) будет больше максимального числа в фрагменте ряда. Если же Аркадий брал конфеты $2 + 4$, то повторяя аналогичные рассуждения для ряда чисел 1, 3, 5, 6, 7, 8, … находим вариант, в котором Борис взял себе $1 + 3 + 6$ конфет, а Вера – 5.

Задача 8. Известно, что красная амёба каждую минуту делится на три амёбы, каждая из которых может оказаться красной или синей, а синяя амёба уже никогда не делится. Однажды в болото попала одна красная амёба. Через какое-то время в болоте плавали только 2023 синих амёбы и ни одной красной. Сколько красных амёб успело пожить в этом болоте?

Ответ: 1011. **Решение.** Пусть красных амёб за весь рассматриваемый период было $\boldsymbol{x}$. Заметим, что каждая амёба, кроме самой первой, родилась от одной красной амёбы. Всего амеб, кроме самой первой, было $2023 + \boldsymbol{x} - 1$. А с другой стороны, каждая красная амёба разделилась на три амебы. То есть, всего в болоте появилось $3\boldsymbol{x}$ амёб. Получается, что $3\boldsymbol{x} = 2023 + \boldsymbol{x} - 1$. То есть, $2\boldsymbol{x} = 2022$, откуда находим ответ.