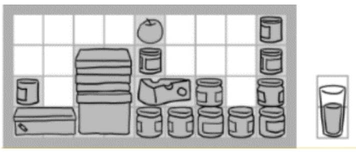
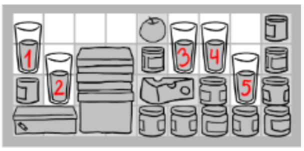
IX Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2022-2023 учебный год

1 класс

Решения задач отборочного тура

Задача 1. Холодильник заполнен продуктами, как показано на рисунке. Сколько стаканов сока можно поставить на полку холодильника так, чтобы сок не проливался? Перекладывать продукты нельзя.

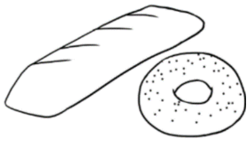




5

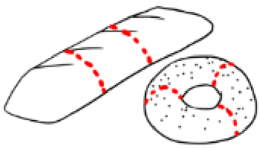
Решение. На рисунке есть 5 столбиков, в каждом из котором есть хотя бы 2 пустые клетки. Значит, можно разместить 5 стаканов сока (см. рис. слева).

Задача 2. Мама 3 детей купила к завтраку бублик с маком и хрустящий багет. Маме нужно разделить бублик и багет на всех своих детей поровну, по одному равному кусочку того и другого каждому. Сколько всего разрезов маме понадобится сделать? Бублик и багет нельзя резать вместе одним разрезом.



5

Решение. Для того, чтобы разделить бублик на 3 части, маме понадобится сделать 3 разреза. А для того, чтобы разделить багет на 3 части, понадобится сделать только 2 разреза. Как видим, при разрезании бублика количество частей и количество разрезов будет одинаковым, а при разрезании багета количество разрезов будет на 1 меньше, чем количество частей. Тогда общее количество разрезов будет равно: $3 + 2 = 5$.

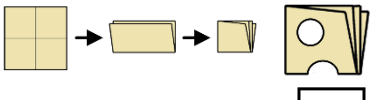


Задача 3. Группа зайчиков и белочек пригласила к себе на вечеринку трёх поросят. Зайчиков было больше, чем белочек, но меньше, чем поросят. Сколько всего участников было на вечеринке?

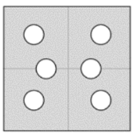
6

Решение. Белочек было меньше, чем зайчиков, а зайчиков меньше, чем 3 – количество поросят. Один зайчик быть не мог, так как тогда отсутствовали бы белочки, а они были. Значит зайчиков было два, а белочка одна: $1 + 2 + 3 = 6$.

Задача 4. Однажды мышка нашла на столе квадратный ломтик плавленого сыра. «Хороший сыр должен быть с дырками!» – подумала мышка. Сложила его два раза пополам и прогрызла отверстия, как показано на рисунке. Сколько будет дырок в ломтике сыра, если теперь его развернуть?



6



Решение. В ломтике сыра будет 4 отверстия от круглой дырки (после того, как развернём, каждая круглая будет отдельно) и 2 от полукруглой (развернём один раз, получим круглую дырку на свёрнутом вдвое сыре).

Задача 5. Маша сказала: «Мне 6 лет». Лиза сказала: «Я на 1 год старше Маши». Катя сказала: «Мне столько же лет, сколько Маше». Мама знает, что одна из девочек сказала неправду, а вместе девочкам 10 лет. Сколько лет девочке, которая сказала неправду?

3

Решение. Пусть Маша говорит правду, и ей 6 лет. Тогда если права Лиза, то ей 7 лет, и их возраст больше 10 лет. Если права Катя, то ей тоже 6 лет, и их с Машей возраст также больше 10 лет. Это противоречит условию, что всем девочкам вместе 10 лет. Значит Маша сказала неправду, а Лиза и Катя – правду. Тогда Кате и Маше поровну лет, а Лизе – на 1 год больше. Вычитая из 10 один, получаем утроенный возраст Маши. $3 + 3 + 3 = 10 - 1$. Значит Маше – 3 года.

Задача 6. Два известных шпиона из 1 «А» Маша и Коля зашифровали придуманным шифром свои имена (в первом прямоугольнике), а также место своей встречи (во втором). Одинаковые буквы – одинаковые знаки, а разные буквы – разные знаки. Назовите место, где они планируют встретиться.

Школа

Решение. В имени Маша есть две буквы «а». Два повторяющихся значка есть только во втором слове, значит, в первом прямоугольнике второе слово – «Маша», а первое – «Коля». Сопоставляя значки получаем, что во втором прямоугольнике зашифровано слово «школа».

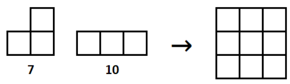
Задача 7. У Васи Петрова день рождения в этом году пришёлся на четверг. В какой день недели был день рождения у его друга Пети Васечкина, если он на 12 дней старше Васи?

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Суббота

Решение. Петя старше Васи, значит, его день рождения был на 12 дней раньше, чем Васи. 7 дней назад был тот же день недели – четверг. А ещё на $12 - 7 = 5$ дней раньше была суббота.

Задача 8. У Пети были вот такие детальки: 7 «уголков» и 10 «палочек». Он складывал из них квадраты, такие как на рисунке, пока хватало нужных деталек. Какое наименьшее количество деталей могло остаться? Детальки можно переворачивать.



2

Решение. На составление квадрата всегда уходит 3 детали (два уголка и палочка или три палочки). Значит, в лучшем случае, нам удастся составить 5 квадратов и две детали останутся. Пять квадратов мы сможем составить так: два уголка и палочка – три квадрата. Три палочки – два квадрата. Останутся уголок и палочка.

Задача 9. Винни Пух наводил порядок в своей кладовке. Там он обнаружил 5 одинаковых горшочков, наполненных мёдом ровно наполовину, весом по 5 кг каждый. «Непорядок», – подумал Винни. И переложил мёд в два горшочка, которые получились полными, а лишний мёд съел. Оказалось, что два полных горшочка и мёд в них весят 16 кг. Сколько мёда теперь в запасе у Винни?

12

Решение. Так как два полных горшка весят 16 кг, то один полный горшок весит 8 кг. Горшок, наполненный мёдом на половину, весит 5 кг. Значит половинка мёда весит $8 - 5 = 3$ кг. А весь мёд в полном горшке – 6 кг. То есть у Винни теперь 12 кг мёда в запасе.

Задача 10. У Павлика есть 13 кубиков трёх разных размеров: маленькие со стороной 2 см, средние со стороной 3 см и большие со стороной 4 см. Павлик сложил 3 башенки: из всех больших, из всех средних и из всех маленьких. Все башенки оказались одинаковой высоты. Сколько средних кубиков было у Павлика?

4

Решение. Так как большие кубики в два раза больше маленьких, а башенки равны, то маленьких кубиков в два раза больше, чем больших. На каждый большой кубик приходится два маленьких. Если больших и маленьких вместе всего 3, то остаётся 10 средних кубиков, высота 10 средних больше, чем одного большого. Если 2 больших, 4 маленьких, то средних 7, тоже высота башенки из средних больше. Если 3 больших и 6 маленьких, то 4 средних и башенки равны по высоте.

IX Санкт-Петербургская математическая олимпиада
2022-2023 учебный год

2 класс

Решения задач отборочного тура

Задача 1. Лиса Алиса украла у богатенького Буратино столько же монет, сколько Базилио, и ещё 4 монеты – всего 9 монет. Сколько монет украдено у Буратино Алисой и Базилио?

Решение. Поскольку у Алисы на 4 монеты больше, чем у Базилио, получаем, что Базилио украл 5 монет, а вместе они украли $9 + 5 = 14$ монет.

$\boxed{14}$

Задача 2. Четверо пиратов схватили оружие: кортик, пистолет, дубинку и саблю, каждый что-то своё:

Ахмет не хватал пистолет,
Капитан Ботик взялся за кортик,
Дубинку не дали Джону и Гале.
Саблю у Гали тоже отобрали.

Что досталось Гале?

Решение. Так как у Ботика – кортик, другое оружие не у него. Дубинку не дали ни Джону, ни Гале, ни Ботику, то есть она у Ахмета. Сабля ни у Ботика, ни у Ахмета, ни у Гали, то есть она у Джона. Таким образом, Галя схватила пистолет.

$\boxed{\text{Пистолет}}$

Задача 3. В зáмке 11 дверей и все они закрыты. Когда кто-либо проходит через дверь, закрытая дверь становится открытой, а открытая – закрывается. Королева, принцесса и король по очереди прошли в свои покои от входа в зáмок. Сколько дверей стали открытыми?

Решение. Проведём по очереди всех персонажей до их комнат и при этом будем ставить точку у каждой пройденной двери. Там, где точек 1 или 3, дверь останется открытой. С тремя точками 6 дверей, с одной точкой – 4.

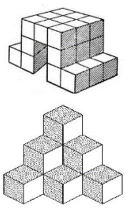
$\boxed{10}$

Задача 4. Один Пузан весит как пять Карапузов, а Карапуз как две Малявки. Одна Малявка весит 5 кг и ещё половину Малявки. Сколько килограммов весит Пузан?

Решение. Половина Малявки – это 5 кг, тогда вся Малявка весит 10 кг. Карапуз весит $10 + 10 =$ $= 20$ кг, тогда Пузан весит $20 \times 5 = 100$ кг.

$\boxed{100}$

Задача 5. Винтик склеил из своих кубиков тоннель, который выглядит сзади так же, как и спереди. А Шпунтик из всех своих кубиков построил башню, но не склеивал кубики, а ставил их один на другой. Сколько кубиков надо добавить Шпунтику, чтобы он смог склеить такой же тоннель, как у Винтика? (Тоннель и башня показаны на рис. справа).



Решение. Тоннель состоит из 27 кубиков, а башня из 10. Итого нужно добавить $27 - 10 = 17$ кубиков.

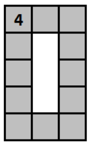
$\boxed{17}$

Задача 6. Кот Василий сумел стащить треть сосисок из пачки и поделился с Барсиком и Мурзиком, которые тоже участвовали в операции. Каждый получил свою треть добычи, и Василию досталось 2 сосиски. Сколько сосисок было в пачке?

Решение. Василию досталась треть от украденного, то есть он украл $2 \times 3 = 6$ сосисок. Эти сосиски составляли треть от всей пачки, поэтому всего сосисок было $6 \times 3 = 18$.

$\boxed{18}$

Задача 7. В каждой серой клеточке Лосяш поставил по одной цифре так, что сумма любых трёх клеточек подряд равна 11 и никакие одинаковые цифры не стоят рядом. Чему равна сумма всех чисел в клеточках?



Решение. Все серые клеточки можно разбить на 4 прямоугольника из трёх соседних клеток. Сумма в каждом таком прямоугольнике равна 11, значит, сумма всех чисел в 4 раза больше.

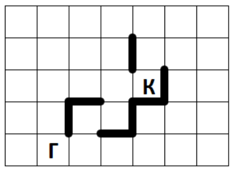
$\boxed{44}$

Задача 8. У Ани есть 4 сушки и 8 спичек. Она составила из всех предметов самое большое число с общей суммой цифр 14. Что это за число?

Примечание. Аня умеет делать только такие цифры: 0 – из одной сушки, 8 – из двух. 1 – из двух спичек, 4 – из четырёх спичек.

Решение. Из 4 сушек можно собрать две, одну или ни одной восьмёрки, а оставшиеся сушки станут нулями. Две восьмёрки – это уже 16, много. Ноль восьмёрок – мало, поскольку спичками можно собрать самое большее две четвёрки, это 8 и меньше 14. Значит, восьмёрка одна. Оставшиеся 6 можно набрать спичками только как 4, 1 и 1.

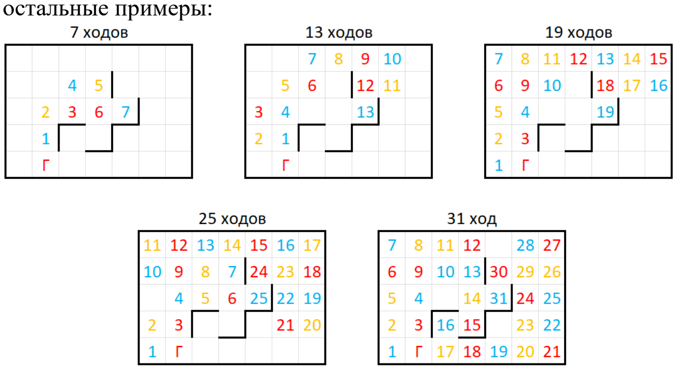
Задача 9. Инопланетянин Гоша (Г) умеет шагать на соседнюю по стороне клетку рядом с той, где он стоит. Каждый шаг Гоша меняет свой цвет: красный → синий → жёлтый → красный и так далее. Сейчас он **красный** и хочет пройти в клетку Корабль (К) так, чтобы в ней оказаться **синим**. Сколько шагов ему придётся сделать?



Примечание. На одну клетку нельзя вставать дважды. Толстые линии – это стены и проходить через них нельзя. Найдите все варианты (доказывать, что других вариантов нет – не нужно).

Решение. Самый короткий маршрут состоит из 5 клеток, но, чтобы оказаться синим, Гоше понадобится 7 ходов. Далее этот маршрут можно удлинять, но не на 3, а на 6 ходов, получая остальные примеры:

$\boxed{7, 13, 19, 25, 31}$



Больше быть не может, поскольку всего 35 клеток.

Задача 10. На доске 3×3 Саша поставил белого слона и черного короля так, что они не бьют друг друга. Сколько у Саши есть различных способов это сделать?

Примечание. Король бьёт все соседние клетки, а слон – все клетки по диагонали. Саша не поворачивает доску.

Решение. Поставим слона в левый нижний угол, тогда для короля есть 4 клетки, куда его можно поставить. Так же для остальных углов, получаем 16 вариантов. Поставим слона посередине нижней стороны доски. Тогда короля можно поставить на 3 верхние клетки. Также для остальных серединок сторон, получаем 12 вариантов. Если слона поставить в центр, то короля никуда нельзя поставить. Итого $16 + 12 =$ $= 28$ вариантов.

$\boxed{28}$

IX Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2022-2023 учебный год

3 класс

Решения задач отборочного тура

Задача 1. У Кристины было 27 конфет, а у Марины поменьше. Кристина отдала 10 конфет Марине, и конфет у девочек стало поровну. Сколько было конфет у Марины сначала?

Решение. Так как Кристина отдала 10 конфет, то у неё стало 17. Значит, и у Марины стало 17. Значит, у неё было сначала $17 - 10 = 7$ конфет.

$\boxed{7}$

Задача 2. К директору зоопарка в гости пришли осьминоги и зайцы – всего 11 животных. Дверной звонок у директора не работал, и поэтому каждый, приходя, стучал в дверь. Осьминог – 8 раз: по разу каждой ногой, а заяц – 4 раза: по разу каждой лапой. Всего директор насчитал 64 удара. Сколько осьминогов пришло в гости к директору?

Решение. Если бы все 11 животных были зайцы, то Костя насчитал бы $11 \cdot 4 = 44$ удара, это мало, нам надо 64. Замена зайца на осьминога увеличивает общее количество ударов на 4. Так как надо добавить $64 - 44 = 20$ ударов, то надо сделать $20/4 = 5$ замен. Значит, осьминогов было 5.

$\boxed{5}$

Задача 3. Очень сильные девочки Катя, Лена, Аня и Эллина несут длинное бревно. Одна девочка несёт один конец бревна, другая – другой, остальные две между ними. Расстояние от Лены до Кати 5 метров. От Эллины до Кати 3 метра, а до Лены – меньше. От Ани до Эллины 5 метров, а до Кати меньше. Какова длина бревна в метрах?

Решение. Нарисуем прямую, на ней Катю и Лену. Местоположение Эллины и Ани определяются из условия однозначно.

$\boxed{7}$

Задача 4. Собрались как-то 10 белок, несколько зайцев, несколько лис и решили устроить маскарад. Зайцы переоделись белками, лисы – зайцами, а белки – кто-то зайцами, кто-то лисами. Получилось 4 белки, 6 зайцев и 7 лис. А сколько лис было сначала?

Решение. Из условия следует, что белок, зайцев и лис всего было $4 + 6 + 7 = 17$. Так как в белок переодевались только зайцы, то зайцев сначала было 4. Значит, лис с самого начала было $17 - 10 - 4 = 3$.

Другое решение. Из условия следует, что 10 белок переоделись в 7 лис и 3 зайцев. Значит из 6 получившихся зайцев три были лисами.

$\boxed{3}$

Задача 5. В Летнем лагере ребят разбили на три отряда из нескольких (2 или больше) человек – отряды «А», «Б» и «В». Между ребятами устроили шашечный турнир – каждый с каждым сыграл по одному разу. Между ребятами отряда А и отряда Б было сыграно 35 партий, а между ребятами отряда А и отряда В – 77. Сколько ребят в отряде Б?

Решение. Из того, что между А и Б было сыграно 35 партий и из того, что 35 раскладывается в произведение двух сомножителей в виде $1 \cdot 35$, $5 \cdot 7$, $7 \cdot 5$ и $35 \cdot 1$ следует, что в отряде А могло быть 5 человек, а в Б – 7 или наоборот. Из того, что между А и В сыграно 77 партий следует аналогично, что в А 7 или 11 человек. Значит, в А – 7 человек. Значит, в отряде Б – 5 человек.

$\boxed{5}$

Задача 6. Несколько ребят решили купить большой арбуз, заплатив поровну – по 100 рублей. Однако через некоторое время к ним добавились ещё трое ребят, и теперь для покупки того же самого арбуза каждый должен заплатить по 70 рублей. Сколько ребят было сначала?

Решение. Пусть те, кто был сначала, заплатили по 70 рублей. Тогда на покупку арбуза не хватает 210 рублей. Пусть те, кто был сначала, все же доплатят ещё по 30 рублей (до 100). Так как $210/30 = 7$, то ребят сначала было семеро.

Другое решение. Пусть вначале x ребят. Стоимость арбуза равна $100x$ из первого условия и $70 \cdot (x + 3)$ из второго. Приравнивая, находим, что $30x = 70 \cdot 3$, откуда $x = 7$.

$\boxed{7}$

Задача 7. Пять яблок, четыре груши и 3 апельсина весят вместе 1 килограмм 160 граммов. Семь яблок, 5 груш и 3 апельсина весят вместе 1 килограмм 420 граммов. Сколько весят вместе яблоко, апельсин и груша?

Решение. Из первого предложения следует, что 10 яблок, 8 груш и 6 апельсинов весят вместе 2 килограмма 320 граммов. Сравниваем это с тем, что написано во втором предложении и получаем, что 3 яблока, 3 груши и 3 апельсина вместе весят 900 граммов. Осталось поделить на 3.

$\boxed{300}$

Задача 8. Марина, Кристина и Лена собрали 9 клубничек. Клубнички были такого веса: по одной весом 1, 3 и 10 граммов, по две весом 2, 6 и 12 граммов. Девочки разделили ягодки так, чтобы общий вес у всех был одинаковый. Кристине достались две ягодки. Сколько получится, если вес первой ягодки умножить на вес второй?

Решение. Общий вес ягод – 54 грамма. Значит, у каждой общий вес ягод $54/3 = 18$ граммов. 18 граммов двумя ягодами из тех, что в условии задачи, можно набрать только как 6 и 12 граммов. Произведение, соответственно, равно 72.

$\boxed{72}$

Задача 9. На куртке у Толи очень много карманов. Однажды он стал складывать в карманы винтики. В первый карман он положил один винтик, во второй – 2, в третий – 3 и так далее, пока не заполнил все карманы. Наблюдательная Кристина сказала – «Ты мог бы разложить все эти винтики по 9 в каждый карман, и все карманы тоже были бы заполнены». Сколько карманов у Толи?

Решение. Будем последовательно складывать винтики в карманы $(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots)$ до тех пор, пока сумма всех винтиков не окажется в 9 раз больше, чем количество карманов. Дойдя до 17-го кармана, получим соответствие.

Другое решение. Пусть у Толи x карманов. Тогда, с одной стороны, у него $x \cdot (x + 1)/2$ винтиков, с другой – $9x$. Получаем, что $x = 17$.

$\boxed{17}$

Задача 10. На двух противоположных гранях кубика написали по букве А, на двух других противоположных – тоже по букве А, на оставшихся двух противоположных – по букве Б. Из 27-ми таких кубиков склеили большой куб и дали его Толе. Какое самое большое количество букв Б в разных местах кубика мог насчитать Толя, повертев кубик в руках?

Решение. У каждого углового кубика видны 3 грани и среди них нет противоположных. Значит, на всех 8-ми угловых кубиках Толя увидит по одной букве Б. Это уже 8 букв Б. Остальных кубиков, у которых хотя бы одна грань будет видна, будет $27 - 8 - 1 = 18$ (без угловых и центрального внутри). Все эти кубики можно повернуть так, что буква Б будет видна, причём видна будет ровно одна, так как видны либо одна грань, либо две соседние. Значит, Толя сможет увидеть $18 + 8 = 26$ букв Б.

$\boxed{26}$

IX Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2022-2023 учебный год

4 класс

Решения задач отборочного тура

Задача 1. Расставьте в ряд числа от 1 до 10 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел заканчивалась на 5 или на 6.

3,2,4,1,5,10,6,9,7,8 (или наоборот)

Решение. Если начать с любого числа, то ряд единственным способом продолжается в обе стороны. Например, рядом с 10 могут быть только 5 и 6, а дальше рядом с 5 – только 1, рядом с 6 – только 9, и так далее.

Задача 2. Бабушка испекла 35 пирожков с капустой, 42 пирожка с повидлом и раздала их своим внукам. Чтобы никто из внуков не обиделся, каждый из них получил одинаковое количество пирожков с капустой, а также одинаковое количество пирожков с повидлом. Какое количество внуков могло быть у бабушки, если их больше одного?

Примечание. Пирожки при делёжке разламывать нельзя – испортятся ведь раньше времени!

7

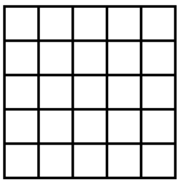
Решение. Учитывая, что $35 = 5 \cdot 7$, а $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, видим, что количество внуков равно общему множителю, то есть 7.

Задача 3. Аркадий и Борис собирали в лесу грибы, причём попадались им исключительно рыжики и сыроежки. Каждый из них собрал по 45 грибов, причём количество рыжиков Аркадия оказалось равно количеству сыроежек Бориса. Если бы каждый из них собрал в два раза больше рыжиков, то у Аркадия получилось бы на 13 грибов больше, чем у Бориса. Сколько сыроежек в корзине у Аркадия?

16

Решение. Пусть Аркадий собрал Р рыжиков и С сыроежек. У Бориса в корзине – С рыжиков и Р сыроежек. Если удвоить количество рыжиков у каждого, то у Аркадия будет 2Р + С грибов, а у Бориса – 2С + Р. Так как теперь у Аркадия на 13 грибов больше, то получается, что Р − С = 13. Учитывая также, что Р + С = 45, находим С = 16.

Задача 4. Аркадий нарисовал на клетчатой бумаге квадрат размером 5 на 5 клеток и закрасил некоторые 10 клеток своего квадрата красным цветом. После этого он посчитал, сколько у него красных клеток в каждом горизонтальном ряду, сколько у него красных клеток в каждом вертикальном ряду и сколько у него красных клеток в каждой из двух диагоналей квадрата. Сумма получившихся двенадцати чисел оказалась равна 25. Известно, что центральная клетка квадрата красная. Сколько всего красных клеток расположено на диагоналях квадрата?



4

Решение. Когда Аркадий считал красные клетки в горизонталях, он в сумме насчитал 10. То же самое с вертикалями. Итого, уже 20. Значит, сумма количеств красных клеток на диагоналях равна 5. Учитывая, что красная центральная клетка квадрата входит в эту сумму два раза, получаем, что всего на диагоналях 4 красных клетки.

Задача 5. 25 конфет разложено по 10 коробочкам так, что в каждой коробке не больше трех конфет. Пустых коробочек нет. Известно, что коробочек, в которых по 2 конфеты, не менее четырёх. Сколько коробочек, в которых по одной конфете?

0

Решение. Проще всего аккуратно перебрать все варианты, как можно разложить конфеты по коробочкам. Если двойных коробочек 4, то осталось разложить 17 конфет по 6 коробочкам. Если они все тройные, то это 18 конфет. А если хотя бы одну тройку заменить единицей, то получится максимум 16 конфет. Если двойных коробочек 5, то осталось набрать 15 конфет пятью коробками. Это можно сделать, только если все они тройные. Если двойных коробочек больше пяти, то оставшиеся конфеты нельзя будет набрать, даже если все коробочки будут тройными.

Задача 6. Несколько мальчиков и девочек играли во дворе, причём мальчиков было на семь больше, чем девочек. Сашу забрали домой обедать, и теперь мальчиков стало в четыре раза больше, чем девочек. Кем является Саша – мальчиком или девочкой – и сколько мальчиков играло во дворе после ухода Саши домой?

Мальчик, 8

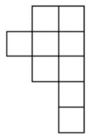
Решение. Пусть Саша – девочка. Тогда количество мальчиков, с одной стороны, равно Д + 7, где Д – количество девочек. А с другой стороны, оно равно $4 \cdot (Д - 1)$. Из уравнения $Д + 7 = 4 \cdot (Д - 1)$ получаем $11 = 3Д$. Такого не может быть. Пусть Саша – мальчик. Тогда количество мальчиков, которые остались после ухода Саши, можно записать как Д + 6. С другой стороны, это количество равно 4Д. Решая уравнение Д + 6 = 4Д, получаем Д = 2. А мальчиков осталось Д + 6 = 8.

Задача 7. Инопланетяне, как известно, бывают красные и синие. Однажды десять инопланетян надели шляпы и стали кружиться в хороводе. Ровно в полдень каждый инопланетянин, держащий за руки инопланетян разного цвета, съел свою шляпу. Какое наибольшее количество шляп могло оказаться съедено?

8

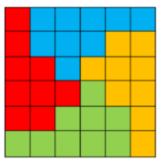
Решение. Пронумеруем инопланетян, стоящих по кругу, числами от 1 до 10. Посмотрим, могло ли оказаться так, что все нечётные инопланетяне съели свою шляпу? Если первый съел свою шляпу, значит, десятый и второй – разного цвета. Далее, второй и четвёртый – разного цвета. А тогда десятый и четвёртый – одного цвета. Рассуждая далее аналогично, получаем, что десятый и восьмой инопланетянин одного цвета, но тогда девятый инопланетянин не ел свою шляпу. Итак, в любом случае как минимум один нечётный инопланетянин не ел свою шляпу. Аналогично, хотя бы один чётный инопланетянин не ел свою шляпу. Значит, могло оказаться максимум восемь съеденных шляп. Пример, где съедено восемь шляп, привести легко: первый, второй, пятый и шестой инопланетяне красные, остальные – синие.

Задача 8. Клетчатая фигура, изображённая на рисунке, называется «флажок». Какое наименьшее количество «флажков» нужно взять, чтобы из них можно было составить какой-нибудь квадрат?

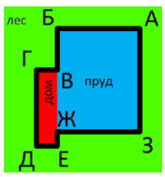


4

Решение. Сам по себе «флажок» квадратом не является. Если мы возьмем два «флажка», то получится, что они вместе занимают 18 клеток, как бы мы их друг к другу ни приложили. Но квадрата из 18 клеток не бывает. Три «флажка» дают 27 клеток – таких квадратов тоже не бывает. А вот из четырех «флажков» можно легко сделать квадрат (см. слева).



Задача 9. Мальчик Витя на самокате выехал из точки А и поехал, не меняя скорости, по круговому маршруту, схема которого приведена на рисунке. Известно, что от точки А до точки Г он ехал 10 минут. От точки Б до В – 3 минуты. От Б до Д – 12 минут. От Е до А – 17 минут. Сколько минут он ехал от точки Ж до точки З?



6

Решение. АБ + ВГ = АГ − БВ = 10 − 3 = 7. АБ − ВГ = = ЗЖ − ВГ = (АЗ + ЕЖ) + ЗЖ − (БВ + ГД) − ВГ = = АЕ − БД = 17 − 12 = 5. Тогда ЖЗ = АБ = 6.

Задача 10. Во дворе стояло несколько столбов. Жители двора решили натянуть по верёвке между каждыми двумя столбами, чтобы сушить на этих верёвках белье. Сколько во дворе столбов, если верёвок получилось в десять раз больше, чем столбов?

21

Решение. Если столбов n, то верёвок получится в 10 раз больше, то есть $10n$. С другой стороны, от каждого из n столбов верёвка идет к каждому из оставшихся $n - 1$ столбов, но так как каждая верёвка посчитана по два раза, то общее количество верёвок равно $n \cdot (n-1)/2$. Из уравнения $10n = n \cdot (n-1)/2$ находим $n = 21$.