

Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2021



Решения задач

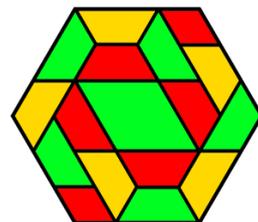
1 класс

1. На поляне встретились несколько сорок, черепах и зайцев. Выяснилось, что у них на всех 2 панциря, 16 ног и 5 хвостов. А сколько у них крыльев?



Ответ: 4 крыла. **Решение.** Поскольку панцирей два, то черепах – две, у них 8 ног и 2 хвоста. Остаётся 8 ног и 3 хвоста. Так как хвосты и 2 ноги есть у всех, то раздадим 3 хвостам по 2 ноги, «превратив» их в сорок. Останется $8 - 6 = 2$ ноги. Их отдадим одной из сорок, тем самым «превратив» её в зайца. Сорок останется 2, и крылья есть только у них, поэтому всего есть 4 крыла.

2. Раскрасьте картинку в три цвета так, чтобы соседние по стороне части были разного цвета.



Ответ изображён на рисунке.

3. Танечка нанизывает флажки на нитку гирлянды так, что соседние флажки отличаются по цвету и размеру. У неё есть два комплекта зелёных флажков, в каждом из которых по одному большому, среднему и маленькому флажку. А ещё есть много красных флажков: больших, средних и маленьких. Других флажков у Танечки нет. Какое самое большое количество больших красных флажков может быть в гирлянде Танечки? Большие, средние и маленькие флажки разных цветов одинаковы по размеру.

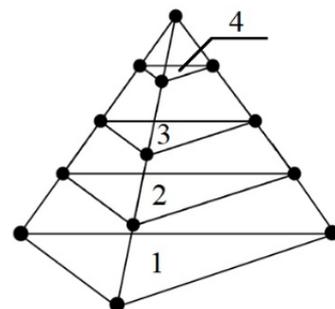
Ответ: 5 флажков. **Решение.** Большие красные флажки могут соседствовать только с маленькими и средними зелёными флажками. Маленьких и средних зелёных в двух наборах всего 4. Значит, больших красных может быть не более пяти (три в промежутках между зелёными и два с краёв).

4. Вася, Петя и Серёжа знакомятся с красивой девочкой Алисой. Алиса спросила их о том, как кого зовут. Первый мальчик ответил: «Я – Петя». Второй сказал: «Я – не Петя». А третий: «Я – не Вася». Известно, что только Серёжа сказал правду. Как на самом деле зовут первого мальчика, как – второго, а как – третьего?

Ответ: первый – Вася, второй – Петя, третий – Серёжа. **Решение.** Первый – не Серёжа (Серёжа говорит правду и не назовёт себя Петей), и не Петя (все кроме Серёжи – лгут, и Петя себя не назвал бы Петей). Значит, первый – Вася. Тогда третий сказал правду, значит он Серёжа. А второй – Петя, и он солгал.

5. В семье Чиселковых много детей, но девочка только одна. Однажды она заметила, что её возраст равен сумме возрастов её братьев. Через два года она с удивлением поняла, что её возраст на 6 лет меньше этой суммы. Сколько всего детей в этой семье?

Ответ: 5 детей. **Решение.** Через два года возраст девочки увеличился на два и стал на 6 меньше суммы возрастов братьев. Значит, сумма возрастов братьев увеличилась на $6 + 2 = 8$. Так как это произошло за два года, то возраст каждого брата увеличился на 2. Значит, братьев было 4, а в семье 5 детей.



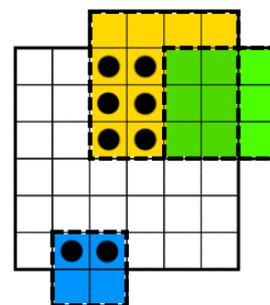
6. Ребята собирают ёлку из бусин и палочек. Коля Инженериков собрал ёлку из верхней бусины и четырёх треугольников (см. рисунок). На это у него ушло 13 бусин и 24 палочки. Сколько бусин и палочек у него уйдёт на ёлку из верхней бусины и шести пятиугольников?

Ответ: бусин – 31, палочек – 60. **Решение.** 6 раз по 5 бусин плюс одна на макушку = 31 бусина. На шесть пятиугольников нужно 30 палочек. Помимо этого, из каждой бусины, кроме верхней, ещё одна палочка торчит вверх. Итого плюс ещё 30 палочек. Всего 31 бусина и 60 палочек.

7. У Ани и Васи есть набор карточек с цифрами от 0 до 9. Аня сложила из всех карточек пять двухзначных чисел так, чтобы их сумма была наибольшей. А Вася сложил из всех карточек пять двухзначных чисел так, чтобы их сумма была наименьшей. Чему равна разность сумм Ани и Васи?

Ответ: 180. **Решение.** Чтобы сумма была наибольшей, в старшие разряды помещаем большие цифры: $94 + 83 + 72 + 61 + 50 = 360$. Чтобы сумма была наименьшей, то наоборот, в старшие разряды помещаем наименьшие цифры: $19 + 28 + 37 + 46 + 50 = 180$. Тогда разность: $360 - 180 = 180$.

8. У Никиты есть четыре разных по размеру квадрата, стороны которых равны целому числу клеток. Никита положил их на лист так, что какие-то части квадратов наложились, и обвёл. На рисунке показана получившаяся у него фигура. Закрасьте клетки, покрытые ровно двумя квадратами.

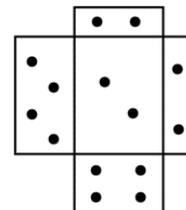


Ответ изображён на рисунке.

Решения задач

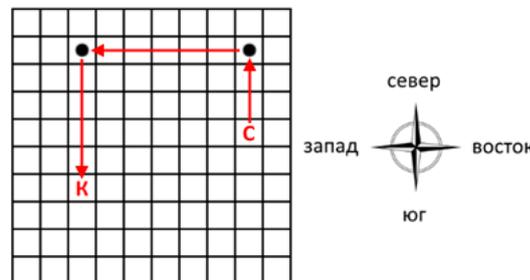
2 класс

1. Внутри прямоугольников расставьте 14 звёздочек так, чтобы ровно в трёх прямоугольниках было по 2 звёздочки, а в любом прямоугольнике было не больше 8 звёздочек.



Пример ответа изображён на рисунке.

2. На секретной карте было написано: пройдите от старого дуба 3 клетки на север, вдвое больше на запад, и на 4 клетки меньше, чем уже прошли, на юг. Мыши так и сделали: они нашли клад Кота Леопольда и отметили его буквой «К». По пути карта попала под дождь и её размыло водой. Где на ней был отмечен старый дуб?



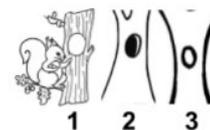
Ответ изображён на рисунке. Решение: вычисляем количество клеток для каждого хода (6 на запад и 5 на юг) и рисуем стрелки от клада в обратном порядке.

3. В гонках участвуют 5 яхт. Капитан Врунгель сказал, что яхта «Беда» лидирует – идёт на первом месте. Лом сказал, что «Беда» в первой тройке, а Фукс сказал, что «Беда» не первая и не вторая. Двое из них ошибаются. На каком месте сейчас яхта «Беда», если у «Беды» на самом деле нечётное место?



Ответ: 5 место. Решение. У «Беды» может быть 1, 3 или 5 место. Если это 1, то Врунгель и Лом говорят правду – не подходит. Если это 3, то Лом и Фукс говорят правду – не подходит. Остается 5 место, тогда только Фукс говорит правду.

4. У белки есть 5 шишек и она их раскладывает в три дупла на соседних деревьях, которые стоят в ряд. Первую шишку она положила в первое дупло, а каждую следующую шишку кладёт в соседнее дупло. Перечислите все варианты, сколько шишек может получиться в каждом дупле?



Ответ: 1: 3, 2: 2, 3: 0; 1: 2, 2: 2, 3: 1; 1: 1, 2: 2, 3: 2. Решение. Рассмотрим все возможные последовательности, в которых белка может раскладывать шишки, получим 3 различных результата:

$$1-2-1-2-1 \rightarrow 3, 2, 0; \quad 1-2-1-2-3 \rightarrow 2, 2, 1; \quad 1-2-3-2-1 \rightarrow 2, 2, 1; \quad 1-2-3-2-3 \rightarrow 1, 2, 2.$$

5. Как-то встретились три калькулятора и показали друг другу три различных числа из ноликов и единиц. Когда они сложили эти числа, получилось 2021. Что за числа они показали друг другу? Найдите все варианты.

Ответ: 1000, 1010, 11; 1000, 1011, 10; 1001, 1010, 10; 1010, 1011, 0.

Решение: Поскольку число может начинаться только с 1, нам потребуется два числа по 1000 или больше, чтобы получить число больше 2000. В этих числах в разряде сотен нельзя поставить ничего кроме 0, поскольку в числе 2021 там тоже 0. Переберём подходящие варианты этих двух чисел, меняя последние две цифры (третье число будет получаться как разность 2021 и уже взятых чисел):

1000, 1001, 20 – не годится из-за 2	1001, 1010, 10 ✓
1000, 1010, 11 ✓	1001, 1011, 9 – не годится из-за 9
1000, 1011, 10 ✓	1010, 1011, 0 ✓

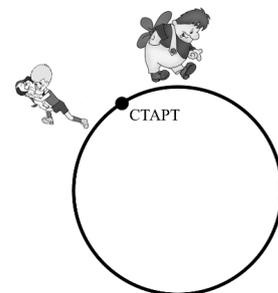
6. Витя победил в шахматном турнире против трёх противников с результатом 6 очков. Каждый сыграл с каждым по одному разу. Какое самое большое количество очков мог набрать Петя, оказавшийся на втором месте?

Примечание: за победу дается 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0.

	Витя	Петя	Аня	Коля
Витя	X	2	2	2
Петя	0	X	2	2
Аня	0	0	X	2
Коля	0	0	0	X

Ответ: у Пети 4 очка. **Решение:** Всего сыграно 6 партий, это 12 очков. Витя выиграл у всех, значит, Петя набрал не больше 4 очков. **Пример турнирной таблицы изображён на рисунке.**

7. По круговой дорожке стадиона стартовали Малыш и Карлсон. Они одновременно начали двигаться с отметки «старт», но в противоположных направлениях. Малыш пробежал один круг, а Карлсон пролетел несколько кругов, и оба финишировали одновременно там же, где стартовали. За это время они встретились 5 раз, считая момент старта и финиша. Сколько кругов пролетел Карлсон?



Ответ: 3 круга. **Решение.** Карлсон пролетел какое-то целое количество кругов навстречу Малышу. Нарисуем, как они двигались. Если у Карлсона было 2 круга, то они встретились 3 раза – мало. Если было 3 круга, то они встретились 5 раз – подходит. Если больше, чем 3 круга, то встреч было больше 5 – много.

8. Десять друзей играли в компьютерную игру. Пять ребят прошли в игре половину уровней, трое – по 3 уровня, двоим осталось пройти по одному уровню. Если сложить количество уровней, пройденное всеми этими ребятами вместе, то получится, что они прошли игру ровно 5 раз. Сколько уровней в игре?

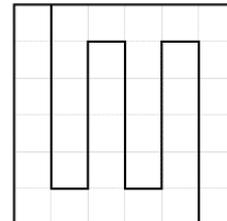
Ответ: 14 уровней. **Решение.** Первые 5 ребят вместе прошли игру 2,5 раза. Добавим двум последним по 1 уровню, тогда они прошли игру ещё 2 раза. Значит, оставшиеся трое, которые прошли по 3 уровня и ещё минус 2 уровня (мы их забираем обратно), прошли $3 \cdot 3 - 2 = 7$ – это оставшаяся половинка до 5 полных игр. Поскольку половинка игры – это 7 уровней, то вся игра – это 14 уровней.

Решения задач

3 класс

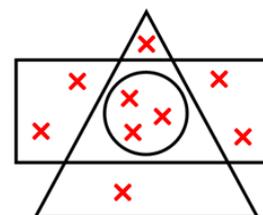
1. Покажите, по какой линии можно разрезать квадрат 6×6 клеточек на две части так, чтоб ни в одну из них нельзя было поместить квадратик 2×2 .

Ответ изображён на рисунке.



2. Меткий Костя без промахов кидает дротики в мишень странной формы – такую, как на рисунке. В треугольник попали 5 дротиков, в круг – 3, в прямоугольник – 7. Какое самое большое количество дротиков мог бросить Костя?

Ответ: 9 дротиков. Решение. В прямоугольнике вне круга – 4 дротика, в треугольнике вне круга – 2 дротика. Таким образом более, чем $3 + 4 + 2 = 9$ дротиков, быть не могло. Пример приведён на рисунке.



3. Пусть для записи какого-то числа использованы только цифры «0» и «1». Назовём такое число *толстеньким*, если в нём нулей больше, чем единиц. Назовём число *худеньким*, если единиц больше, чем нулей. На сколько больше худеньких пятизначных чисел, чем пятизначных толстеньких?

Ответ: на 6. Решение. Подсчитаем, сколько всего пятизначных чисел, в записи которых участвуют только 0 и 1. Первая цифра слева – это 1. Для второй цифры есть 2 варианта – 0 или 1. На каждый из этих двух вариантов по два варианта третьей цифры. Значит, наборов первых трёх цифр всего $2 \cdot 2 = 4$. На каждый из этих 4 вариантов приходится по 2 варианта 4 цифры, и далее – по 2 варианта пятой. Значит, всего получаем 16 пятизначных чисел, в записи которых участвуют только 0 и 1. Подсчитаем количество толстеньких. В толстеньком числе единиц может быть 1 или 2 (совсем не быть единиц не может, ведь первая цифра не может быть 0). Это числа 10000, 11000, 10100, 10010 и 10001 – всего 5 штук. Все остальные числа – худенькие, так как в них количество единиц равно 3, 4 или 5. Значит, количество худеньких равно $16 - 5 = 11$ штук. Значит, худеньких на 6 больше, чем толстеньких.

4. У Люды 33 конфеты, а у Юли 6. Они договорились играть в такую игру: раз в день, после обеда, Юля подбрасывает монету. Если выпал орёл, то Люда съедает 2 своих конфеты, а одну отдаёт Юле. Если выпала другая сторона (решка), то Люда съедает одну свою конфету, а две отдаёт Юле. Сколько дней может длиться эта игра?

Ответ: не более 11. Решение. Количество конфет у Люды каждый день уменьшается на 3. Так как у неё 33 конфеты, то через 11 дней они закончатся. Таким образом, игра длится не более 11 дней.

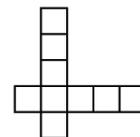
5. У Васиной бабушки в деревне кошек в 3 раза больше, чем собак. Есть ещё гуси – их больше, чем кошек, а кроликов в 5 раз больше, чем гусей. Вдобавок есть ещё и несколько шаловливых поросят, которых боятся кошки. Всего животных 33. Сколько у бабушки может быть гусей?

Ответ: 4. Решение. Пусть собака одна, тогда кошек 3. Пусть гусей 4, тогда кроликов 20, а поросят – 5. Получилась возможная ситуация. Покажем, что это единственно возможный случай. Если собака по-прежнему одна, кошек 3, а гусей уже не 4, а 5 или больше, то даже без поросят животных уже не менее 34, что противоречит условию. Пусть теперь собак 2 или больше. Тогда кошек 6 или больше, гусей, соответственно, 7 или больше, кроликов – 35 или больше, то есть даже без поросят животных 50 или больше, что тоже невозможно.

6. Волк, Лиса, Колобок и Медведь в этой задаче – герои сказки «Колобок». Волк всегда говорит неправду обо всём, что касается Лисы, Лиса – обо всём, что касается Колобка, Колобок – Медведя, а Медведь – Волка. В остальных случаях все говорят правду. Однажды кто-то из них сказал: «Колобок перехитрил Медведя и ушёл от него». Потом добавил: «А вот Лису не перехитрил». Обе фразы, в соответствии со сказкой, оказались правдой. Кто это сказал?

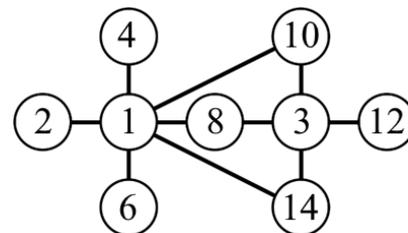
Ответ: Медведь. Решение. Фраза «Колобок перехитрил Медведя и ушёл от него» – во-первых, правдива, во-вторых, речь в ней идёт о Колобке и Медведе. Значит, ни Лиса, ни Колобок произнести её не могли. То есть произнести эту фразу могли Волк или Медведь. Вторая фраза – правда, и речь в ней об отношениях Колобка и Лисы. Значит, Волк её произнести не мог, а вот Медведь мог. Таким образом, единственный вариант – эти фразы произнёс Медведь.

7. В клеточки вписаны цифры 1, 3, 3, 3, 5, 7, 7, 7 и 8 – в каждой клетке одна цифра. Сумма чисел в горизонтальной полоске равна сумме чисел в вертикальной полоске. Чему может быть равна эта сумма?



Ответ: 26. Решение. Если сложить числа в вертикальной полоске и в горизонтальной, то получившаяся сумма должна быть чётной, так как суммы в вертикальной и горизонтальной равны. Сумма чисел в вертикальной и горизонтальной равна $1 + 3 \cdot 3 + 5 + 3 \cdot 7 + 8 +$ число в пересечении полосок $= 44 +$ число в пересечении. Так как сумма должна быть чётной, то число в пересечении должно быть чётным. Единственная возможность – это число 8. Значит, сумма в вертикальной и горизонтальной равна $44 + 8 = 52$ и, значит, сумма в каждой из полосок равна $52/2 = 26$.

8. У деда Мазая на озере есть несколько островов, соединённых мостами – так, как на рисунке. В половодье дед Мазай спас 9 зайцев и рассадил по одному на остров. Как только дед Мазай уплыл, непоседливые зайцы, как по команде, стали каждые пять минут перебегать на соседний остров. Какое наибольшее число зайцев сможет в какой-то момент оказаться на одном острове?



Ответ: 7. Решение. Напишем на островах числа. Видно, что с чётного острова за один раз (пройдя по одному мосту) можно попасть только на нечётный остров и наоборот. Это означает, что зайцы, которые сначала были на нечётных островах, никогда не окажутся вместе на одном острове с зайцами, которые были сначала на чётных островах. Нечётных островов два, потому что более 7 зайцев встретиться на одном острове не смогут. А вот 7 могут встретиться: например, сначала зайцы с островов 2, 4 и 6 перебегают на остров 1, а зайцы с островов 8, 10, 12 и 14 – на остров 3. Далее все эти зайцы перебегают на остров 8, где и встречаются.

Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2021



Решения задач

4 класс

1. Напомним, что 1 января 2021 года – пятница. В этот день на Острове Невезения взяли и отменили понедельник (т.е. неделя у них теперь состоит из шести дней, после воскресенья сразу идёт вторник). Таким образом, 4 января по обычному календарю был понедельник, а по островному – вторник. Назовите самую первую после 3 января дату, когда день недели и по обычному, и по островному календарям будет одинаковым.

Ответ: 9 февраля. **Решение.** Если день по обычному и по островному календарю совпадают, то совпадать будет вся неделя со вторника до воскресенья. Поэтому достаточно проследить за вторниками (это и будет первый совпадающий день). По обычному календарю вторники: 5, 12, 19, 26 января, 2, 9, 16, 23 февраля, а по островному: 4, 10, 16, 22, 28 января, 3, 9, 15, 21 февраля. Отсюда первая подходящая дата – 9 февраля.

2. На Острове Логики есть два племени: одды и евены. Одды лгут в компании, в которой нечётное число людей (а в остальных случаях говорят правду), а евены – в компании с чётным числом людей. В одной компании произошёл такой диалог:

А: Здесь более 30 людей.

Б: Нет, не более 30.

В этот момент заходит ещё один человек.

А: Ну теперь и подавно более 30 людей.

Б: Нет, и теперь не более 30.

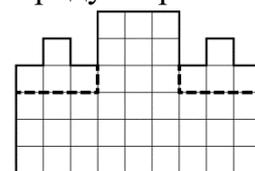
Из каких племён А и Б?

Ответ: А – евен, Б – одд. **Решение.** Высказывания каждого из людей должны изменить свою истинность после прихода ещё одного человека, а значит, людей было 30, а стало 31. В этом случае А – евен, а Б – одд.

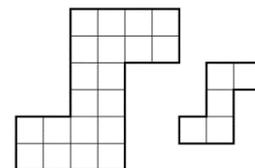
3. Палиндромом называется число, которое читается слева направо так же, как и справа налево. Вставьте как можно меньше цифр в число 112124151423111 так, чтобы оно стало палиндромом. Не забудьте объяснить, почему меньшим количеством вставленных цифр не обойтись.

Ответ: 11213241514231211 (2 цифры). **Решение.** Цифры 2, 3 и 5 встречаются нечётное количество раз. Одна из них может стоять в центре, а остальные две необходимо продублировать. Следовательно, хотя бы две цифры придётся вставить.

4. Разрежьте фигурку на верхнем рисунке на три одинаковые по форме, но, возможно, разные по размеру части.



Примечание: пример фигурок, одинаковых по форме, но разных по размеру, на нижнем рисунке.



Ответ изображён на рисунке.

5. Буратино составил пример из цифр от 1 до 9, используя каждую цифру по разу. Ночью мышка Машка стянула несколько цифр, и вместо них оказались звёздочки. Остался пример $4*6 + 3** = 7*8$. Докажите, что Буратино составил неверный пример.

Доказательство. Последний разряд второго слагаемого – 2, тогда на средние разряды остались цифры 1, 5, 9, и никакая сумма двух из них не даёт третью.

6. Имеется 10 гирек массой от 1 до 10 г, но неизвестно, какая гирька имеет какую массу. Про любую пару гирек можно спросить, верно ли, что масса большей делится на массу меньшей, и получить ответ «да» или «нет». Трогать гири нельзя, а по внешнему виду невозможно определить, какая гиря тяжелее. Веса каких гирек можно точно определить такими вопросами?

Ответ: все, кроме 4 и 8 г. **Решение.** Спросим про все возможные пары. Заметим, что 1 г участвует в девяти парах, 2 г – в пяти парах, 3, 4, 6, 8 и 10 г – в трёх парах, 5 и 9 г – в двух парах, 7 г – в одной паре. Тогда мы сразу можем выявить гирьки весом 1, 2 и 7 г. Также можем отделить чётные от нечётных чисел, ведь чётные образуют пару с 2 г. Т.е. выявляем гирьку 3 г. После этого выявляем гирьки 5 и 9 г (9 образует пару с 3, а 5 не образует). Также выявляем 10 г (она образует пару с гирькой 5 г) и 6 г (образует пару с 1, 2, 3 г). А вот гирьки 4 и 8 г мы различить не сможем – они образуют пары только с гирьками 1, 2 г и между собой.

7. В таблице 8×8 расставлены натуральные числа. В левом верхнем квадратике 3×3 сумма чисел равна 40, а в правом нижнем квадрате 5×5 – 76. Может ли оказаться, что во всех строках и во всех столбцах суммы чисел равны?

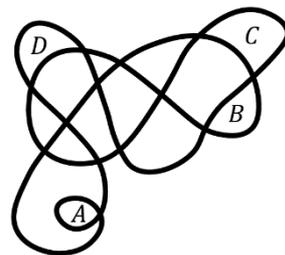
Ответ: нет, не может. **Решение.** Пусть в правом верхнем прямоугольнике 3×5 сумма чисел x . Тогда сумма чисел в одном ряду:

$$\frac{40 + x}{3} = \frac{76 + x}{5},$$

$$200 + 5x = 228 + 3x,$$

откуда $x = 14$. Но клеток 15, а числа должны быть натуральными.

8. В городе Странном есть только одна улица, но она очень длинная, кривая и неоднократно пересекает сама себя. К тому же у этой улицы нет ни начала, ни конца. (Пример такого города изображён на рисунке.) Услышав эту информацию, барон Апельсин заявил, что в этом городе должен существовать квартал, граничащий с одним или с двумя перекрёстками (в примере на рисунке такие кварталы отмечены буквами). Прав ли он?



Ответ: нет, не прав. **Пример изображён на рисунке:**

