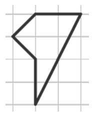
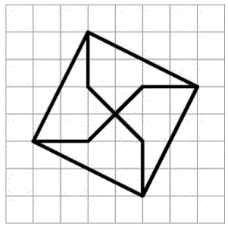
Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2020

Решения задач | 4 класс



1. Из нескольких фигурок, как на рисунке, сложите квадрат.

Ответ изображён в сетке справа.



2. Иванов поступил на работу в Университет и стал писать по одной статье в год. Через пятнадцать лет он стал профессором и стал писать по две статьи в год. Ещё через некоторое время руководство Университета решило, что всем профессорам необходимо писать по 4 статьи в год. Иванов вздохнул и начал выполнять требование. А ещё через десять лет руководство Университета посчитало, что четырёх статей в год мало – нужно пять. Иванов проработал на таких условиях один год. После этого ему исполнилось 70 лет, и он ушёл на пенсию. За всё время работы он написал 90 статей. А во сколько лет он пришёл работать в Университет?

Ответ: 29 лет. **Решение.** В первые 15 лет Иванов написал 15 статей, в последние 11 лет – $5 + 10 \cdot 4 = 45$ статей. В остальные годы он писал по две статьи в год, а написал за эти годы 30 статей. То есть 15 лет он писал по 2 статьи в год. Значит, работал в Университете он 41 год, а пришёл работать в 29 лет.

3. За круглый стол сели 100 человек, каждый из которых – зулус или бушмен. Человек говорит правду, только если оба его соседа той же национальности, что и он сам; иначе он лжёт. Каждый из них произнёс следующую фразу: «Среди моих соседей ровно один говорит правду». Скольким из них можно верить?

Ответ: никому. **Решение.** Допустим, что человек A сказал правду, и пусть он зулус. Тогда его соседи тоже зулусы, причём один из них (назовём его B) говорит неправду, то есть второй сосед B – бушмен (назовём этого бушмена C). Но C говорит неправду, а тогда фраза B оказывается верной. Противоречие.

Ситуация, когда все врут, возможна: пусть бушмены и зулусы сидят через одного.

4. В квадрат 4×4 вписаны цифры. Андрюша заметил, что в каждой домино (то есть в двух соседних по сторонах клетках) сумма цифр или меньше 5, или не меньше 14. Докажите, что какая-то цифра встречается не менее четырёх раз.

Доказательство. Назовём цифры от 0 до 4 *маленькими*, а от 5 до 9 – *большими*. Заметим, что в таблице встречаются либо только маленькие, либо только большие цифры. Но тогда различных цифр не более пяти, а клеток – 16, а значит, какая-то цифра встречается не менее 4 раз.

5. У Васи есть по 4 карточки с цифрами 1, 3, 5 и 7. Вася составил из них четыре четырёхзначных числа. Он сложил эти числа и получил сумму X. Оказалось, что в числе X одна цифра чётная, а остальные нечётные. Найдите сумму цифр числа X.

Ответ: 28. **Решение.** Очевидно, что последняя цифра чётная, а остальные нечётные. Также заметим, что на каждый следующий разряд должна быть перенесена единица – 0 и 2 перенестись не могут (иначе в следующем разряде цифра окажется чётной), а тройки в переносе не бывает, так как каждая цифра не более 7. Если бы переносов не было, то сумма цифр X была бы $4 \cdot (1 + 3 + 5 + 7) = 64$. Но каждый из переносов уменьшает сумму цифр на 9, поэтому сумма цифр X будет равна $64 - 4 \cdot 9 = 28$.

6. В 4 классе некоторые девочки умные, другие – красивые, а в некоторых оба качества совмещаются. Валера заметил, что даже если утроить количество умных и красивых девочек, их

всё равно окажется меньше, чем девочек, обладающих ровно одним из предложенных качеств. А Илья сосчитал, что красивых девочек в два раза больше, чем умных. Красивых девочек меньше 16. Докажите, что одновременно красивых и умных девочек не более четырёх.

Доказательство. Пусть К – количество только красивых, У – только умных, а С (от «супер») – количество красивых и умных девочек. Тогда:

$$\begin{cases} 3С < К + У, & (1) \\ 2(У + С) = К + С. & (2) \end{cases}$$

Удвоим (1) и сложим с(2), тогда получим $6С + 2У + 2С < 2К + 2У + К + С$, то есть $7С < 3К$, откуда $2С < К$ или $3С < К + С$. Поскольку $К + С < 16$ и их чётное количество (так как вдвое больше, чем $У + С$), то $К + С$ не более 14, а тогда $3С < 14$, откуда С не более 4.

7. Несколько шахматистов играли круговой турнир (каждые двое играли одну партию, за выигрыш – 1 очко, за ничью – пол-очка, за проигрыш – ничего). Оказалось, что Антон выиграл ровно у трети своих противников, Борис – ровно у четверти своих противников, а Вадим набрал шесть с половиной очков и занял второе место. А сколько было игроков?

Ответ: 13. **Решение.** Пусть участвовало n человек. Из условия следует, что $n - 1$ делится на 3 и на 4, то есть n даёт остаток 1 при делении на 12. Пусть $n > 13$ (то есть хотя бы 25). Тогда максимальное количество очков, которое разыгрывалось в турнире, было: $n - 1$ за первое место, $6{,}5$ – за второе и не более 6 за остальные места (их $n - 2$). Итого не более $7n - 6{,}5$ очков, что явно меньше разыгрываемых $n(n-1)/2$.

Другое решение. Если $n > 25$ (то есть хотя бы 37), то Вадим уже не мог быть вторым – Антон и Борис в этом случае набирают больше него. Допустим, что всего 25 игроков. Тогда у Антона от 8 до 16 очков (8 побед и сколько-то ничьих), и он первый, у Вадима – $6{,}5$ и он второй (по условию), у Бориса – 6 очков (на победах, он не мог обогнать Вадима), а у остальных 22 игроков не более 6 очков. Итого максимальное количество очков, которое могло быть, равно $160{,}5$, что меньше положенных 200.

8. У Алёны есть часы с циферблатом и двумя стрелками – часовой и минутной. В Новый Год, ровно в полночь, часы сломались. Поломка оказалась такая: когда обе стрелки встречаются, они зацепляются друг за друга, и следующие пять минут минутная стрелка тащит часовую (то есть часовая перемещается со скоростью минутной), после чего стрелки снова расходятся и до следующей встречи идут с обычными скоростями. Найдите ближайший после Нового года момент, когда часы будут показывать правильное время. Ответ дайте с точностью до пяти минут (например, «между 7.35 и 7.40»).

Ответ: между 15.15 и 15.20. **Решение.** Минутная стрелка идёт правильно. Значит, часы начнут показывать правильное время, когда часовая стрелка сломанных часов обгонит ровно на круг обыкновенную часовую стрелку. Заметим, что за каждый час часовая стрелка пройдёт чуть меньше двух часов (на сколько именно меньше – сосчитаем чуть позже). Значит, раньше, чем через 12 часов, обгона на круг не произойдёт точно.

Сосчитаем, что будет ровно через 6 часов. С каждым полным оборотом минутная стрелка будет 5 минут двигать часовую, то есть часовая стрелка каждый час будет идти 55 минут как часовая и 5 минут как минутная. За эти 6 часов она пройдёт половину круга со скоростью минутной и ещё пять с половиной часов как часовая – то есть окажется точно посередине между 11 и 12. Следующий полный оборот минутная стрелка не догонит часовую, то есть через 7 часов минутная стрелка окажется в точности на 12, а часовая на половине первого. И за следующие 6 часов часовая стрелка передвинется на 12.

Итак, через 13 часов обе стрелки окажутся на 12, и ровно в этот момент они расцепятся (отставание от обычных часов ровно на час).Ещё один круг минутная стрелка не будет задевать часовую (на сломанных часах 1.00, на нормальных – 2.00), ещё за час часовая стрелка подвинется чуть меньше, чем на два часа (и всё ещё не обгонит обычную). Обгон произойдёт, когда в следующий раз стрелки часов на обычном циферблате встретятся –между 15.15 и 15.20.