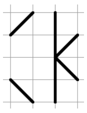
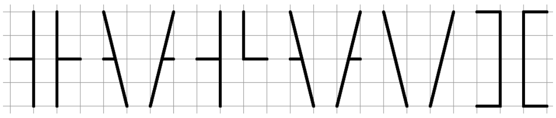
Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2020

Решения задач

3 класс

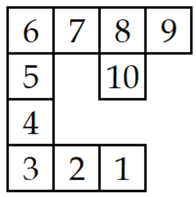
1. Миша придумал шифр – вместо каждой буквы он по определенному правилу пишет несколько символов. Например, буква «К» теперь выглядит, как на рисунке слева. Догадайтесь, какое слово зашифровал Миша на рисунке справа?





Ответ: НАЧАЛО. **Пояснение.** Шифрование осуществляется так: делим букву вертикально посередине на две части и левую часть сдвигаем на 3 клетки вправо.

2. Из бумаги в клеточку вырезали фигуру и каждую клетку пронумеровали. После этого в каждую клетку посадили по муравью. Вечером муравьёв унесли в муравейник спать, а утром тех же муравьёв снова посадили по одному в клетку той же фигуры так, что те муравьи, которые были соседями, снова стали соседями (соседями считаются муравьи, которые сидят в клетках, у которых есть общая сторона). На клетке с каким номером может теперь находиться муравей, который раньше был в клетке с номером 10?



Ответ: 9 или 10. **Решение.** У муравья, который был в клетке 8, было 3 соседа, и других муравьев с таким количеством соседей нет. Значит, этот муравей снова займёт клетку номер 8. Таким образом, у муравья, который занимал 10-ю клетку, есть три возможности вновь соседствовать с муравьём из 8-й – занимать 7-ю, 9-ю или снова 10-ю. У муравья в 7-й клетке 2 соседа, у 10-й – один. Значит, клетка 7 не подходит. А вот клетки с номерами 9 и 10 подходят – соседи останутся соседями.

3. Оля, Соня и Даша захотели съесть мороженое и зашли в кафе. Мороженое было трёх сортов – клубничное, шоколадное и банановое. Каждая выбрала себе какое-то одно, но пока никому об этом не сказала. Они вместе сели за столик, подошла официантка и спросила Олю: «Все будут клубничное?» Оля ответила: «Не знаю». Потом официантка задала вопрос Соне: «Может быть, тогда все будут шоколадное?» Соня ответила: «Нет». Наконец, спросили Дашу: «Ну, может быть, вы все хотите банановое?» Что и почему ответила Даша: «Да», «Нет» или «Не знаю»? Девочки слышат все вопросы и все ответы.

Ответ: «Нет». **Решение.** Если бы Оля хотела шоколадное или банановое, то она ответила бы «Нет». Значит, Оля выбрала себе клубничное. Таким образом, все хотеть банановое не могут. Значит, Даша ответит «Нет».

4. В каком-то году 31-го марта Костя решил делать зарядку каждый день. Начал 1 апреля, а закончил 18 мая и больше не делал, так как решил, что уже стал сильным и можно больше зарядку не делать. Андрей тоже захотел стать сильным и делал зарядку весь год, но только по чётным числам. Саша делал зарядку всю весну, но только по воскресеньям. Сколько могло быть дней, когда все трое делали зарядку?

Ответ: 3 или 4. **Решение.** С 1 апреля по 18 мая – 48 дней. Эти 48 дней можно разбить на 42 дня с 1 апреля по 12 мая и ещё 6 дней с 13 мая по 18 мая. Так как в апреле 30 дней, то в период с 1 апреля по 12 мая чётность дат, на которые приходятся воскресенья, чередовалась. Так как $42 = 6 \cdot 7$, то в этот период было 6 воскресений и, значит, 3 чётных воскресенья и 3 нечётных. В оставшиеся 6 дней могло быть только одно воскресенье (а могло и не быть), и если было, то оно могло быть чётным, а могло быть и нечётным. Значит, воскресений с чётным номером дня могло быть 3 или 4. Так как все вместе делают зарядку в чётное воскресенье в период с 1 апреля по 18 мая, то дней, когда все делают вместе, могло быть 3 или 4.

5. В классе учится 21 человек. Однажды все ученики этого класса играли в снежки – мальчики против девочек. Каждый мальчик бросил в каждую девочку по одному снежку. Какие-то из бросков были удачными, а какие-то оказались промахами. Оказалось, что нет девочек, в которых попали одинаковое количество раз. Какое наибольшее число девочек могло быть в классе?

Ответ: 11. **Решение.** Предположим, что в классе 12 девочек. Значит, мальчиков – 9. Количество попаданий в одну девочку от 9-ти мальчиков может быть 0, 1, 2, …, 9 – всего 10 вариантов. Так как девочек 12, а вариантов 10, то у хотя бы двух девочек варианты совпадут, что противоречит условию. Значит, 12 девочек быть не могло. По тем же причинам более 12 девочек тоже быть не может. Если же девочек 11, то мальчиков 10 и варианты попадания могут быть такими: в первую девочку – ноль снежков, во вторую – один, в третью – два, …, в 11-ю – 10. Таким образом, наибольшее число девочек в классе – 11.

6. 33 богатыря и 40 разбойников сели за большой круглый стол переговоров. После переговоров дядька Черномор спросил каждого: «Слева от тебя сидел разбойник?». Правду ответили только те, кто сидел либо между богатырями, либо между разбойниками. Сколько человек ответили «Да»?

Ответ: 40. **Решение.** Соседи слева и справа у каждого могут быть такими:

1) богатырь – богатырь;
2) богатырь – разбойник;
3) разбойник-богатырь;
4) разбойник-разбойник.

«Да» ответят только в случаях 2 и 4, то есть только те, у кого правый сосед – разбойник. Так как разбойников 40, то и правыми соседями они будут для 40 человек. Значит, ответ «Да» дали 40 человек.

7. У каждого хоббита, пришедшего в гости к Гэндальфу, есть 4 карманца – один для бечёвок, второй – для колец, третий – для платков и четвёртый – для монеток. Выяснилось, что:
   1) У каждого в каждом карманце либо одна вещь, либо пусто.
   2) Нет двух хоббитов таких, что в каждом карманце у них одинаковое количество вещей (например, нет двух хоббитов, у которых по одной бечёвке и одному кольцу, а платков и монеток нет).
   3) Общее количество вещей у любого хоббита равно общему количеству вещей у другого хоббита.

   Какое максимальное количество хоббитов могло быть?

Ответ: 6. **Решение.** Так как у хоббитов оказалось одинаковое количество предметов, то у всех одинаковое количество пустых карманов и карманов с одним предметом. Таким образом, нам надо подсчитать, каким количеством способов можно положить по 1 предмету в 0, 1, 2, 3 или 4 кармана. Сделать все карманы пустыми ровно 1 способ (ничего никуда не класть), и в этом случае хоббит ровно один. Точно так же, если во всех карманах по одному предмету, то хоббит тоже один. Вариантов, когда во всех карманах вместе ровно один предмет – 4, так как это либо бечёвка, либо кольцо, либо платок, либо монетка. Вариантов, когда во всех карманах 3 предмета – тоже 4 (нет либо бечёвки, либо кольца, либо платка, либо монетки). С помощью небольшого перебора нетрудно подсчитать, что вариантов, когда во всех карманцах ровно 2 предмета – 6. Значит, наибольшее возможное количество хоббитов – 6.

8. Ребята купили несколько одинаковых арбузов и в первый же день все вместе съели 5 штук, причём все съели одинаково. На следующий день четверо уже не захотели есть арбузы. Остальные доели то, что осталось, но каждый съел уже в три раза меньше, чем в предыдущий день. Сколько всего было ребят?

Ответ: 10. **Решение.** Если бы на следующий день ели все, то, так как ели в 3 раза медленнее, то не съели бы даже двух арбузов. Значит, во второй день ребята съели ровно один арбуз. Если бы ребята ели со скоростью первого дня, то съели бы 3 арбуза. Значит, те четверо, которые не ели во второй день, в первый день съели вместе ровно 2 арбуза. Значит, для того чтобы съесть в первый день один арбуз, требовалось ровно 2 человека. Так как в первый день было съедено 5 арбузов, то всего было $5 \cdot 2 = 10$ человек.